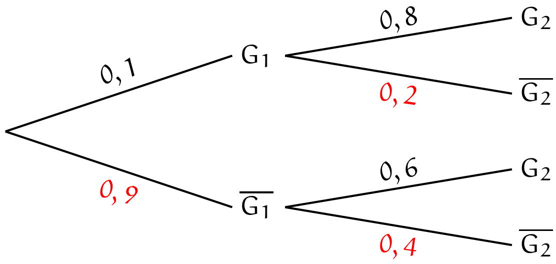
Polynésie 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) Représentons la situation par un arbre.



D'après la formule des probabilités totales,

$$p_2 = p(G_2) = p(G_1 \cap G_2) + p\left(\overline{G_1} \cap G_2\right) = p(G_1) \times p_{G_1}(G_2) + p\left(\overline{G_1}\right) \times p_{\overline{G_1}}(G_2)$$
$$= 0,1 \times 0,8 + (1 - 0,1) \times 0,6 = 0,08 + 0,54 = 0,62.$$

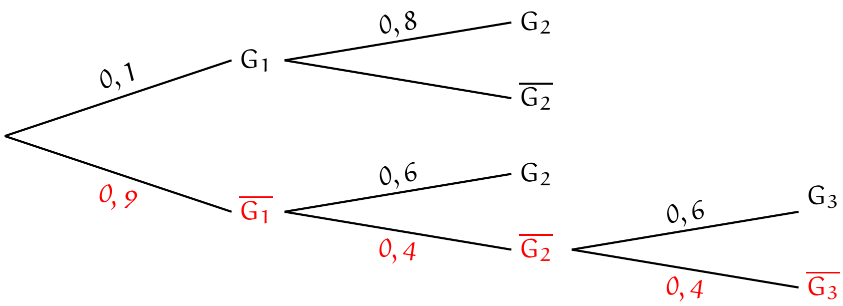
$$\boxed{p(G_2) = 0,62.}$$

2) La probabilité demandée est $p_{G_2}\left(\overline{G_1}\right)$. Or

$$p_{G_2}\left(\overline{G_1}\right) = \frac{p\left(\overline{G_1} \cap G_2\right)}{p(G_2)} = \frac{p\left(\overline{G_1}\right) \times p_{\overline{G_1}}(G_2)}{p(G_2)} = \frac{(1-0,1) \times 0,6}{0,62} = \frac{0,54}{0,62} = \frac{54}{62} = \frac{27}{31}.$$

$$\boxed{p_{G_2}(\overline{G_1}) = \frac{27}{31}.}$$

3) On rajoute des branches à l'arbre du 1) :



L'événement « le joueur gagne au moins une des trois premières parties » est l'événement contraire de l'événement « le joueur ne gagne aucune des trois premières parties ». La probabilité que le joueur ne gagne aucune des trois premières parties est

$$p\left(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3}\right) = 0,9 \times 0,4 \times 0,4 = 0,144$$

et donc la probabilité que le joueur gagne au moins une des trois premières parties est $1 - 0,144 = 0,856$.

$$\boxed{\text{La probabilité que le joueur gagne au moins une des trois premières parties est } 0,856.}$$

4) D'après la formule des probabilités totales,

$$p_{n+1} = p(G_{n+1}) = p\left(G_n \cap G_{n+1}\right) + p\left(\overline{G_n} \cap G_{n+1}\right) = p\left(G_n\right) \times p_{G_n}\left(G_{n+1}\right) + p\left(\overline{G_n}\right) \times p_{\overline{G_n}}\left(G_{n+1}\right)$$
$$= p_n \times 0,8 + (1 - p_n) \times 0,6 = 0,2p_n + 0,6 = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}.}$$

5) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

- $\frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{3}{4} - \frac{13}{20} = \frac{15}{20} - \frac{13}{20} = \frac{2}{20} = 0,1 = p_1$ et l'égalité est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$. Alors,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5} = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) + \frac{3}{5} = \frac{3}{20} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} + \frac{3}{5} = \frac{15}{20} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n.}$$

6) Puisque $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{3}{4}.}$$

7) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} - p_n < 10^{-7} &\Leftrightarrow \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n < 10^{-7} \Leftrightarrow \frac{13}{4} \times \frac{1}{5^n} < \frac{1}{10^7} \Leftrightarrow 5^n > \frac{13 \times 10^7}{4} \\ &\Leftrightarrow \ln(5^n) > \ln\left(3,25 \times 10^7\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\ &\Leftrightarrow n\ln(5) > \ln\left(3,25 \times 10^7\right) \Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(3,25 \times 10^7\right)}{\ln(5)} \text{ (car } \ln(5) > 0) \\ &\Leftrightarrow n > 10,7\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 11 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

Les entiers naturels non nuls n pour lesquels $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$ sont les entiers supérieurs ou égaux à 11.

