Liban 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (3 points) (commun à tous les candidats)

Pour chaque question, une seule des réponses est exacte.

Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Il sera attribué 0,5 point si la réponse est exacte, 0 sinon.

1) Un magasin de matériel informatique vend deux modèles d'ordinateur au même prix et de marques M_1 et M_2. Les deux ordinateurs ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc.
D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70% des acheteurs ont choisi l'ordinateur M_1 et, parmi eux, 60% ont préféré la couleur noire. Par ailleurs, 20% des clients ayant acheté un ordinateur M_2 l'ont choisi de couleur blanche. On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des ordinateurs précédemment cités et on choisit un client au hasard.

a) La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur M_2 de couleur noire est :

Réponse A : $\frac{3}{5}$ **Réponse B :** $\frac{4}{5}$ **Réponse C :** $\frac{3}{50}$ **Réponse D :** $\frac{6}{25}$

b) La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur de couleur noire est :

Réponse A : $\frac{21}{50}$ **Réponse B :** $\frac{33}{50}$ **Réponse C :** $\frac{3}{5}$ **Réponse D :** $\frac{12}{25}$

c) Le client a choisi un ordinateur de couleur noire. La probabilité qu'il soit de marque M_2 est :

Réponse A : $\frac{4}{11}$ **Réponse B :** $\frac{6}{25}$ **Réponse C :** $\frac{7}{11}$ **Réponse D :** $\frac{33}{50}$

2) Une urne contient 4 boules jaunes, 2 boules rouges et 3 boules bleues.
Les boules sont indiscernables au toucher.
L'expérience consiste à tirer au hasard successivement avec remise 3 boules de l'urne.

a) La probabilité d'obtenir trois boules de même couleur est :

Réponse A : $\frac{11}{81}$ **Réponse B :** $\frac{2}{7}$ **Réponse C :** $\frac{5}{84}$ **Réponse D :** $\frac{4}{63}$

b) La probabilité d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes est :

Réponse A : $\frac{2}{7}$ **Réponse B :** $\frac{16}{81}$ **Réponse C :** $\frac{1}{21}$ **Réponse D :** $\frac{79}{84}$

c) On répète plusieurs fois l'expérience, de manière indépendante, en remettant à chaque fois les trois boules dans l'urne.
Le nombre minimal d'expériences à réaliser pour que la probabilité de l'événement « obtenir au moins une fois trois boules bleues » soit supérieure ou égale à $0,99$ est :

Réponse A : 123 **Réponse B :** 122 **Réponse C :** 95 **Réponse D :** 94

Liban 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1. a) Réponse D

1. b) Réponse B

1. c) Réponse A

2. a) Réponse A

2. b) Réponse B

2. c) Réponse A

Explication 1. a) On note N (respectivement B) l'événement « l'ordinateur choisi est noir (respectivement blanc) » et M_1 (respectivement M_2) l'événement « l'ordinateur choisi est de la marque M_1 (respectivement M_2) ». La probabilité demandée est $p(M_2 \cap N)$.

L'énoncé donne $p\left(\overline{M_2}\right) = p(M_1) = 0,7$ et donc $p(M_2) = 0,3$. L'énoncé donne aussi $p_{M_2}\left(\overline{N}\right) = p_{M_2}(B) = 0,2$ et donc $p_{M_2}(N) = 0,8$. On a

$$p(M_2 \cap N) = p(M_2) \times p_{M_2}(N) = 0,3 \times 0,8 = 0,24 = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}.$$

.
La bonne réponse est la réponse D.

Explication 1. b) La probabilité demandée est $p(N)$. La formule des probabilités totales permet d'écrire

$$\begin{aligned} p(N) &= p(N \cap M_1) + p(N \cap M_2) = p(M_1) \times p_{M_1}(N) + p(M_2) \times p_{M_2}(N) = 0,7 \times 0,6 + 0,3 \times 0,8 \\ &= 0,42 + 0,24 = 0,66 = \frac{66}{100} = \frac{33}{50}. \end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse B.

Explication 1.c) La probabilité demandée est $p_N(M_2)$.

$$p_N(M_2) = \frac{p(M_2 \cap N)}{p(N)} = \frac{6/25}{33/50} = \frac{6}{25} \times \frac{50}{33} = \frac{4}{11}.$$

La bonne réponse est la réponse A.

Explication 2. a) La probabilité d'obtenir trois boules jaunes est $\left(\frac{4}{9}\right)^3$, la probabilité d'obtenir trois boules rouges est $\left(\frac{2}{9}\right)^3$ et la probabilité d'obtenir trois boules bleues est $\left(\frac{3}{9}\right)^3$. La probabilité d'obtenir trois boules de même couleur est donc

$$\left(\frac{4}{9}\right)^3 + \left(\frac{2}{9}\right)^3 + \left(\frac{3}{9}\right)^3 = \frac{64 + 8 + 27}{9^3} = \frac{99}{9^3} = \frac{11}{9^2} = \frac{11}{81}.$$

La bonne réponse est la réponse A.

Explication 2. b) Les tirages fournissant trois boules de couleurs différentes sont JRB, JBR, BJR, BRJ, RJB et RBJ. Chacun de ces six tirages a la probabilité $\frac{4}{9} \times \frac{2}{9} \times \frac{3}{9}$ d'être obtenu. La probabilité d'obtenir trois boules de couleurs différentes est donc

$$6 \times \frac{4}{9} \times \frac{2}{9} \times \frac{3}{9} = \frac{16}{81}.$$

La probabilité d'obtenir trois boules de couleurs différentes est donc $\frac{16}{81}$.
La bonne réponse est la réponse B.

Explication 2. c) On note n le nombre de fois que l'expérience est effectuée et X le nombre de fois que l'on obtient 3 boules bleues. Cette expérience suit un schéma de Bernoulli. En effet, on effectue n fois une même expérience, de manière indépendante, et à chaque expérience, on a deux éventualités « obtenir trois boules bleues » avec une probabilité $p = \left(\frac{3}{9}\right)^3 = \frac{1}{27}$ et « ne pas obtenir trois boules bleues » avec une probabilité $1 - p = \frac{26}{27}$.
La probabilité d'obtenir au moins une fois trois boules bleues en n essais est

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{26}{27}\right)^n.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
p(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{26}{27}\right)^n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{26}{27}\right)^n \leqslant 0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{27}{26}\right)^n \geqslant 100 \\
\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{27}{26}\right)^n\right) \geqslant \ln(100) \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{27}{26}\right) \geqslant \ln(100) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(100)}{\ln(27/26)} \\
\Leftrightarrow n \geqslant 122,02\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 123.
\end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse A.

