Asie 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité)

On admet que la durée de vie (exprimée en années) d'un certain type de capteur de lumière peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ strictement positif), c'est-à-dire que la probabilité que ce capteur tombe en panne avant l'année t (t positif) s'exprime par :

$$F(t) = p(X \leqslant t) = p([0;t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx.$$

1) Restitution organisée de connaissances.

Pré-requis :

a) $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$ (où A et B sont deux événements tels que $p(B) \neq 0$) ;

b) $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$ (où A est un événement) ;

c) $p([a;b]) = F(b) - F(a)$ (où a et b sont des nombres réels positifs tels que $a \leqslant b$).

Démontrer que, pour tout nombre réel positif s, on a :

$$p_{[t;+\infty[}([t;t+s]) = \frac{F(t+s) - F(t)}{1 - F(t)}$$

et que $p_{[t;+\infty[}([t;t+s])$ est indépendant du nombre réel t.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.

2) Démontrer que la probabilité que le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années est égale à $e^{-0,4}$.

3) Sachant que le capteur n'est pas tombé en panne au cours des deux premières années, quelle est, arrondie au centième, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

4) On considère un lot de 10 capteurs, fonctionnant de manière indépendante. Dans cette question, les probabilités seront arrondies à la sixième décimale.

a) Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait exactement deux capteurs qui ne tombent pas en panne au cours des deux premières années.

b) Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un capteur qui ne tombe pas en panne au cours des deux premières années.

Asie 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) Restitution organisée de connaissances

Soient s et t deux réels positifs. Vérifions tout d'abord que $p([t,+\infty[) \neq 0$.

$$p([t,+\infty[) = 1 - p([0,t[) = 1 - p([0,t]) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

On a montré au passage que $F(t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - e^{-\lambda t}$. Ensuite, comme la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, $p([t,+\infty[) = e^{-\lambda t} \neq 0$ puis

$$\begin{aligned}
p_{[t,+\infty[}([t,t+s]) &= \frac{p((t \leqslant X \leqslant t+s) \cap (X \geqslant t))}{p(X \geqslant t)} = \frac{p(t \leqslant X \leqslant t+s)}{1 - p(X < t)} = \frac{p(t \leqslant X \leqslant t+s)}{1 - p(X \leqslant t)} \text{ (car } p(X=t)=0\text{)} \\
&= \frac{F(t+s) - F(t)}{1 - F(t)} \\
&= \frac{\left(1 - e^{-\lambda(t+s)}\right) - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} = \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} - \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} \\
&= 1 - e^{-\lambda t - \lambda s + \lambda t} = 1 - e^{-\lambda s} = F(s).
\end{aligned}$$

En particulier, $p_{[t,+\infty[}([t,t+s])$ est indépendant de t.

2) La probabilité demandée est $p(X \geqslant 2)$. D'après la question précédente, pour tout réel positif t, on a

$$p(X \geqslant t) = e^{-\lambda t} = e^{-0,2t}$$

et donc $p(X \geqslant 2) = e^{-0,4}$.

3) La probabilité demandée est $p_{[2,+\infty[}([6,+\infty[)$.

$$p_{[2,+\infty[}([6,+\infty[) = \frac{p((X \geqslant 2) \cap (X \geqslant 6))}{p(X \geqslant 2)} = \frac{p(X \geqslant 6)}{p(X \geqslant 2)} = \frac{e^{-0,2\times 6}}{e^{-0,2\times 2}} = \frac{e^{-1,2}}{e^{-0,4}} = e^{-0,8} = 0,45 \text{ arrondi au centième.}$$

4) a) Notons Y le nombre de capteurs qui ne tombent pas en panne au cours des deux premières années.
La variable aléatoire Y est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années » avec une probabilité $p = e^{-0,4}$ (d'après la question 2)) ou « le capteur tombe en panne au cours des deux premières années » avec une probabilité $1 - p = 1 - e^{-0,4}$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = e^{-0,4}$.

La probabilité demandée est $p(Y = 2)$. La calculatrice fournit

$$p(Y=2) = \binom{10}{2} \times (e^{-0,4})^2 (1 - e^{-0,4})^8 = 0,0028217\ldots.$$

Donc $p(Y = 2) = 0,002822$ arrondi à la sixième décimale.

b) La probabilité que tous les capteurs tombent en panne au cours des deux premières années est

$$p(Y=0) = \binom{10}{0} (e^{-0,4})^0 (1 - e^{-0,4})^{10} = (1 - e^{-0,4})^{10}$$

et donc la probabilité qu'au moins un appareil ne tombe pas en panne au cours des deux premières années est

$$p(Y \geqslant 1) = 1 - (1 - e^{-0,4})^{10} = 0,9999848\ldots$$

Donc, $p(Y \geqslant 1) = 0,999985$ arrondi à la sixième décimale.

