Rochambeau 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (3 points) (commun à tous les candidats)

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.
20% des boules portent le numéro 1 et sont rouges.
Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10% sont rouges et les autres sont vertes.

1) On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

2) On a tiré une boule au hasard. Elle est rouge.
Montrer que la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est égale à $\dfrac{2}{7}$.

3) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne).

a) Exprimer en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages.

b) Déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à $0,99$.

Rochambeau 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) On note R l'événement « la boule tirée est rouge » et U l'événement « la boule tirée porte le n° 1 ». L'événement « la boule tirée est verte » est l'événement $\overline{R}$ et l'événement « la boule tirée porte le n° 2 » est l'événement $\overline{U}$.
L'énoncé donne $p(R \cap U) = p(U) = 0,2$ et donc $p\left(\overline{U}\right) = 1 - p(U) = 0,8$. L'énoncé donne aussi $p_{\overline{U}}(R) = 0,1$. La formule des probabilités totales permet alors d'écrire

$$p(R) = p(R \cap U) + p\left(R \cap \overline{U}\right) = p(R \cap U) + p\left(\overline{U}\right) \times p_{\overline{U}}(R) = 0,2 + 0,8 \times 0,1 = 0,28.$$

La probabilité que la boule tirée soit rouge est $0,28$.

2) La probabilité demandée est $p_R\left(\overline{U}\right)$.

$$p_R\left(\overline{U}\right) = \frac{p\left(R \cap \overline{U}\right)}{p(R)} = \frac{p\left(\overline{U}\right) \times p_{\overline{U}}(R)}{p(R)} = \frac{0,8 \times 0,1}{0,28} = \frac{0,08}{0,28} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}.$$

La probabilité que la boule tirée porte le n° 2 sachant qu'elle est rouge est $\frac{2}{7}$.

3) a) Notons X le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes (les tirages se faisant avec remise) sont effectuées;
- chaque expérience a deux issues : « la boule tirée est rouge et porte le n° 1 » avec une probabilité $p = 0,2$ ou son contraire avec une probabilité $1 - p = 0,8$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,2$.

La probabilité demandée est $p(X \geqslant 1)$ et on a

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,8^n.$$

b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned}
p(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\Leftrightarrow 1 - 0,8^n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow 0,8^n \leqslant 0,01 \\
&\Leftrightarrow \ln\left(0,8^n\right) \leqslant \ln(0,01) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln(0,8) \leqslant \ln(0,01) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \text{ (car } \ln(0,8) < 0) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 20,6\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 21 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à $0,99$ à partir de $n = 21$.

