

Rochambeau 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) On note R l'événement « la boule tirée est rouge » et U l'événement « la boule tirée porte le n° 1 ». L'événement « la boule tirée est verte » est l'événement \bar{R} et l'événement « la boule tirée porte le n° 2 » est l'événement \bar{U} . L'énoncé donne $p(R \cap U) = p(U) = 0,2$ et donc $p(\bar{U}) = 1 - p(U) = 0,8$. L'énoncé donne aussi $p_{\bar{U}}(R) = 0,1$. La formule des probabilités totales permet alors d'écrire

$$p(R) = p(R \cap U) + p(R \cap \bar{U}) = p(R \cap U) + p(\bar{U}) \times p_{\bar{U}}(R) = 0,2 + 0,8 \times 0,1 = 0,28.$$

La probabilité que la boule tirée soit rouge est 0,28.

2) La probabilité demandée est $p_R(\bar{U})$.

$$p_R(\bar{U}) = \frac{p(R \cap \bar{U})}{p(R)} = \frac{p(\bar{U}) \times p_{\bar{U}}(R)}{p(R)} = \frac{0,8 \times 0,1}{0,28} = \frac{0,08}{0,28} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}.$$

La probabilité que la boule tirée porte le n° 2 sachant qu'elle est rouge est $\frac{2}{7}$.

3) a) Notons X le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes (les tirages se faisant avec remise) sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la boule tirée est rouge et porte le n° 1 » avec une probabilité $p = 0,2$ ou son contraire avec une probabilité $1 - p = 0,8$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,2$.

La probabilité demandée est $p(X \geq 1)$ et on a

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,8^n.$$

b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned} p(X \geq 1) \geq 0,99 &\Leftrightarrow 1 - 0,8^n \geq 0,99 \Leftrightarrow 0,8^n \leq 0,01 \\ &\Leftrightarrow \ln(0,8^n) \leq \ln(0,01) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow n \ln(0,8) \leq \ln(0,01) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \text{ (car } \ln(0,8) < 0) \\ &\Leftrightarrow n \geq 20,6\dots \\ &\Leftrightarrow n \geq 21 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99 à partir de $n = 21$.