

Réunion 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (4 points) (commun à tous les candidats)

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Partie I :

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges. Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

- 1) Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.
- 2) Soit l'événement C : « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ».
Démontrer que la probabilité de l'événement C est égale à $\frac{7}{18}$.
- 3) Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.
- 4) À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ?

Partie II :

On dispose d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires. Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B ;

- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;
- si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.

- 1) a) Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.
b) Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?
- 2) Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\frac{4}{9}$.
- 3) Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

Réunion 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

Partie I

1) A chaque lancer, la probabilité d'obtenir une face noire est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Puisque les lancers sont effectués de manière indépendante, la probabilité d'obtenir deux faces noires c'est-à-dire une face noire à chaque lancer est $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

La probabilité d'obtenir deux faces noires est $\frac{1}{9}$.

2) De même, la probabilité d'obtenir deux faces vertes est $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ et la probabilité d'obtenir deux faces rouges est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Donc

$$p(C) = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{4} = \frac{4+1+9}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}.$$

$$p(C) = \frac{7}{18}.$$

3) L'événement « les deux faces obtenues sont de couleurs différentes » est l'événement \bar{C} et $p(\bar{C}) = 1 - p(C) = \frac{11}{18}$.

$$p(\bar{C}) = \frac{11}{18}.$$

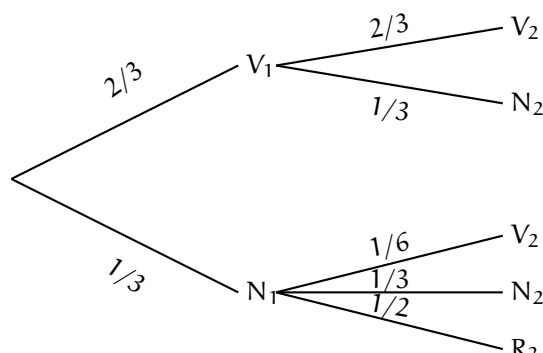
4) Notons V l'événement « les deux faces obtenues sont vertes ». La probabilité demandée est $p_C(V)$. Or

$$p_C(V) = \frac{p(V \cap C)}{p(C)} = \frac{p(V)}{p(C)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{7}{18}} = \frac{18}{7 \times 36} = \frac{1}{7 \times 2} = \frac{1}{14}.$$

$$p_C(V) = \frac{1}{14}.$$

Partie II

1) a) On note V_1, V_2, N_1, \dots , les probabilités d'obtenir une face verte au premier lancer, au deuxième lancer, une face noire au premier lancer ... Représentons alors la situation par un arbre.



b) Puisqu'on a obtenu une face verte au premier lancer, on a relancé le dé B avec une probabilité $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ d'obtenir une face verte au deuxième lancer.

$$p_{V_1}(V_2) = \frac{2}{3}.$$

2) La probabilité demandée est $p(V_1 \cap V_2)$. Or

$$p(V_1 \cap V_2) = p(V_1) \times p_{V_1}(V_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

3) La probabilité demandée est $p(V_2)$. D'après la formule des probabilités totales, $p(V_2) = p(V_1 \cap V_2) + p(N_1 \cap V_2)$. On sait déjà que $p(V_1 \cap V_2) = \frac{4}{9}$. Ensuite,

$$p(N_1 \cap V_2) = p(N_1) \times p_{N_1}(V_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}.$$

Finalement, $p(V_2) = \frac{4}{9} + \frac{1}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$.

La probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer est $\frac{1}{2}$.