Pondichéry 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) a) $X = -1$ correspond à l'événement « le joueur tire une boule blanche et une boule rouge ».
Notons B_1 (respectivement B_2) l'événement « la première (respectivement la deuxième) boule tirée est blanche ».
L'événement $X = -1$ est encore l'événement $\left(B_1 \cap \overline{B_2}\right) \cup \left(\overline{B_1} \cap B_2\right)$. De plus, les événements $\left(B_1 \cap \overline{B_2}\right)$ et $\left(\overline{B_1} \cap B_2\right)$ sont incompatibles. La probabilité demandée est donc

$$\begin{aligned} p\left(\left(B_1 \cap \overline{B_2}\right) \cup \left(\overline{B_1} \cap B_2\right)\right) &= p\left(B_1 \cap \overline{B_2}\right) + p\left(\overline{B_1} \cap B_2\right) = p\left(B_1\right) \times p_{B_1}\left(\overline{B_2}\right) + p\left(\overline{B_1}\right) \times p_{\overline{B_1}}\left(B_2\right) \\ &= \frac{10}{n+10} \times \frac{n}{n+9} + \frac{n}{n+10} \times \frac{10}{n+9} = \frac{20n}{(n+10)(n+9)}. \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X = -1) = \frac{20n}{(n+10)(n+9)}.}$$

b) Les deux autres valeurs prises par la variable X sont 4 dans le cas où le joueur tire deux boules rouges et -6 dans le cas où le joueur tire deux boules blanches. La probabilité de tirer deux boules blanches est

$$p\left(B_1 \cap B_2\right) = p\left(B_1\right) \times p_{B_1}\left(B_2\right) = \frac{10}{n+10} \times \frac{9}{n+9} = \frac{90}{(n+10)(n+9)}.$$

Enfin, $p(X = -6)$ est la probabilité de tirer deux boules rouges :

$$p(X = -6) = p\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right) = p\left(\overline{B_1}\right) \times p_{\overline{B_1}}\left(\overline{B_2}\right) = \frac{n}{n+10} \times \frac{n-1}{n+9} = \frac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)}.$$

$$\boxed{P(X = -6) = \frac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)},\ P(X = -1) = \frac{20n}{(n+10)(n+9)} \text{ et } P(X = 4) = \frac{90}{(n+10)(n+9)}.}$$

c)

$$\begin{aligned} E(X) &= (-6) \times p(X = -6) + (-1) \times p(X = -1) + 4 \times p(X = 4) \\ &= -6\frac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)} - \frac{20n}{(n+10)(n+9)} + 4\frac{90}{(n+10)(n+9)} \\ &= \frac{-6n(n-1) - 20n + 360}{(n+10)(n+9)} = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}. \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}.}$$

d)

$$E(X) > 0 \Leftrightarrow \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)} > 0 \Leftrightarrow -6n^2 - 14n + 360 > 0 \Leftrightarrow 3n^2 + 7n - 180 < 0$$

Maintenant, le discriminant du trinôme $3x^2 + 7x - 180$ est $\Delta = 49 + 2160 = 2209 > 0$. Ce trinôme admet deux racines réelles à savoir $x_1 = \dfrac{-7 + \sqrt{2209}}{6} = \dfrac{-7 - 47}{6} = -9 < 0$ et $x_2 = \dfrac{-7 + \sqrt{2209}}{6} = \dfrac{20}{3} = 6,6\ldots$.
On sait que $x^2 + \dfrac{7}{3}x - 60 < 0 \Leftrightarrow x \in]x_1, x_2[$. Mais alors, puisque n est un entier naturel supérieur ou égal à 2,

$$E(X) > 0 \Leftrightarrow n \in]x_1, x_2[\Leftrightarrow n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}.$$

$$\boxed{\text{Les valeurs de } n \text{ pour lesquelles } E(X) > 0 \text{ sont 2, 3, 4, 5 et 6.}}$$

2) Notons Y le nombre de boules rouges obtenues sur 20 tirages successifs avec remise d'une boule de l'urne. Y suit un schéma de Bernoulli. En effet,

- une même expérience (à savoir tirer une boule de l'urne) à deux éventualités (obtenir une boule rouge ou ne pas obtenir une boule rouge) est effectuée 20 fois de manière indépendante (puisque la boule est remise dans l'urne à chaque tirage)

- à chaque expérience, la probabilité de tirer une boule rouge est $p = \dfrac{n}{n+10}$ et la probabilité de ne pas tirer une boule rouge est $1 - p = \dfrac{10}{n+10}$.

La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge est $p(Y \geqslant 1)$ avec

$$p(Y \geqslant 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - \binom{20}{0}\left(\frac{n}{n+10}\right)^0\left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} = 1 - \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
p(Y \geqslant 1) > 0,999 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} > 0,999 \Leftrightarrow \left(\frac{10}{n+10}\right)^{20} < 0,001\\
&\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{10}{n+10}\right)^{20}\right) < \ln(0,001) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[)\\
&\Leftrightarrow 20\ln\left(\frac{10}{n+10}\right) < \ln(0,001) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{10}{n+10}\right) < \frac{\ln(0,001)}{20}\\
&\Leftrightarrow \frac{10}{n+10} < e^{\frac{\ln(0,001)}{20}} \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R})\\
&\Leftrightarrow \frac{n+10}{10} > e^{-\frac{\ln(0,001)}{20}} \text{ (par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[)\\
&\Leftrightarrow n + 10 > 10e^{-\frac{\ln(0,001)}{20}} \Leftrightarrow n > 10e^{-\frac{\ln(0,001)}{20}} - 10\\
&\Leftrightarrow n > 4,1\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 5 \text{ (car } n \text{ est entier).}
\end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir au moins une boule rouge est strictement supérieure à $0,999$ si et seulement si $n \geqslant 5$.

3) a) Soit k un entier naturel.

$$p(Z \leqslant k) = \int_0^k 0,01e^{-0,01x}\,dx = \left[-e^{-0,01x}\right]_0^k = -e^{-0,01k} - (-e^0) = 1 - e^{-0,01k}.$$

Pour $k = 50$, on obtient $p(Z \leqslant 50) = 1 - e^{-0,01\times 50} = 1 - e^{-0,5} = 0,39$ arrondi au centième.

b) La probabilité de mandée est $p_{Z>50}(Z \leqslant 60)$. Or

$$\begin{aligned}
p_{Z>50}(Z \leqslant 60) &= \frac{p((Z \leqslant 60) \cap (Z > 50))}{p(Z > 50)} = \frac{p(50 < Z \leqslant 60)}{p(Z > 50)} = \frac{p(Z \leqslant 60) - p(Z \leqslant 50)}{1 - p(Z \leqslant 50)}\\
&= \frac{(1 - e^{-0,6}) - (1 - e^{-0,5})}{1 - (1 - e^{-0,5})} = \frac{e^{-0,5} - e^{-0,6}}{e^{-0,5}} = 1 - e^{-0,1}\\
&= 0,095 \text{ arrondi au millième.}
\end{aligned}$$

