Asie 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.
L'événement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'événement V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire $p_1 = 1$.

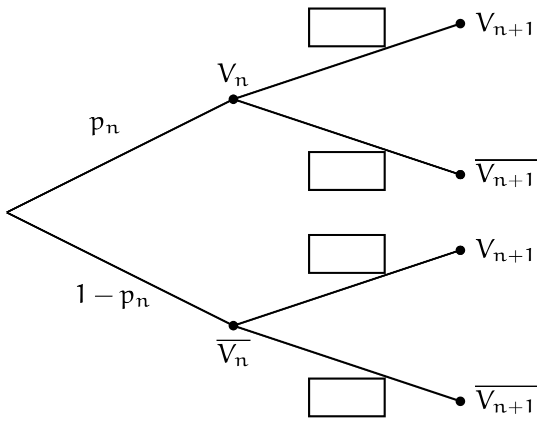
1) Calculer les probabilités des événements suivants :

a) A : « les 2-ième et 3-ième sondages sont positifs » ;

b) B : « les 2-ième et 3-ième sondages sont négatifs ».

2) Calculer la probabilité p_3 pour que le 3-ième sondage soit positif.

3) n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



4) Pour tout entier naturel n non nul, établir que $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.

5) On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = p_n - 0,2$.

a) Démontrer que u est une suite géométrique. En préciser le premier terme et la raison.

b) Exprimer p_n en fonction de n.

c) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.

Asie 2010. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) a) L'événement A est l'événement $V_2 \cap V_3$. Puisque $p_1 = 1$, on a $p(V_2) = 0,6$ puis

$$p\left(V_2 \cap V_3\right) = p(V_2) \times p_{V_2}(V_3) = 0,6 \times 0,6 = 0,36.$$

$$\boxed{p\left(A\right) = 0,36.}$$

b) L'événement A est l'événement $\overline{V_2} \cap \overline{V_3}$. $p\left(\overline{V_2}\right) = 1 - p(V_2) = 0,4$ puis

$$p\left(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right) = 0,4 \times 0,9 = 0,36.$$

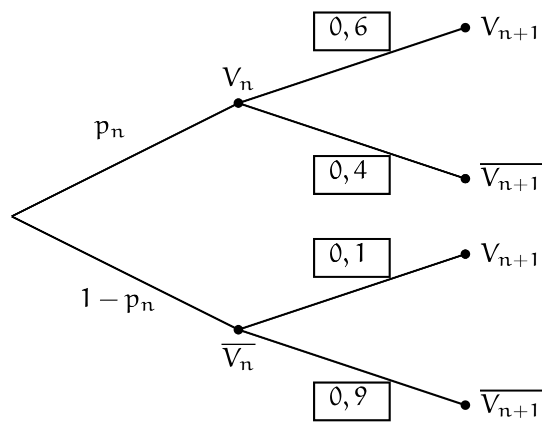
$$\boxed{p\left(B\right) = 0,36.}$$

2) On a aussi $p\left(\overline{V_2} \cap V_3\right) = p\left(\overline{V_2}\right) \times p_{\overline{V_2}}(V_3) = p\left(\overline{V_2}\right) \times \left(1 - p_{\overline{V_2}}\left(\overline{V_3}\right)\right) = 0,4 \times (1 - 0,9) = 0,04$. Mais alors, d'après la formule des probabilités totales,

$$p_3 = p\left(V_2 \cap V_3\right) + p\left(\overline{V_2} \cap V_3\right) = 0,36 + 0,04 = 0,4.$$

$$\boxed{p_3 = 0,4.}$$

3)



4) Soit n un entier naturel non nul. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} = p(V_{n+1}) &= p\left(V_n \cap V_{n+1}\right) + p\left(\overline{V_n} \cap V_{n+1}\right) = p(V_n) \times p_{V_n}\left(V_{n+1}\right) + p\left(\overline{V_n}\right) \times p_{\overline{V_n}}(V_{n+1}) \\ &= 0,6p_n + 0,1(1 - p_n) = 0,6p_n + 0,1 - 0,1p_n = 0,5p_n + 0,1. \end{aligned}$$

5) a) Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 = 0,5p_n - 0,1 = 0,5(p_n - 0,2) = 0,5u_n.$$

Donc la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0,2 = 0,8$.

b) On en déduit que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,8 \times (0,5)^{n-1}$ puis que

$$p_n = u_n + 0,2 = 0,2 + 0,8 \times (0,5)^{n-1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ p_n = 0,2 + 0,8 \times (0,5)^{n-1}.}$$

c) Puisque $-1 < 0,5 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,5)^{n-1} = 0$ puis,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = 0,2.}$$

