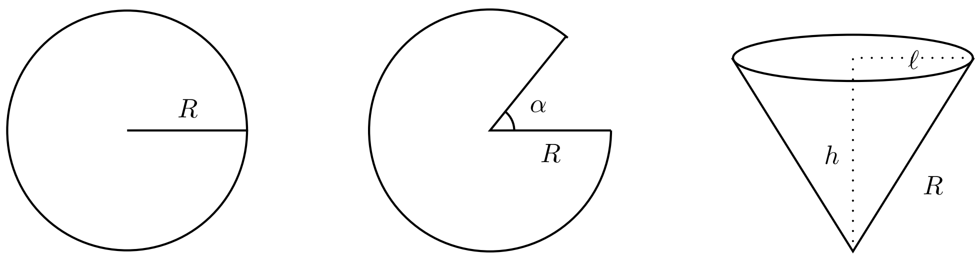
Polynésie 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (5 points) (commun à tous les candidats)



Dans un disque en carton de rayon R , on découpe un secteur angulaire correspondant à un angle de mesure α radians. On superpose les bords afin de créer un cône de révolution. On souhaite choisir l'angle α pour obtenir un cône de volume maximal.

On appelle ℓ le rayon de la base circulaire de ce cône et h sa hauteur.
On rappelle que :

- le volume d'un cône de révolution de base un disque d'aire $\mathscr{A}$ et de hauteur h est $\dfrac{1}{3}\mathscr{A}h$.
- la longueur d'un arc de cercle de rayon r et d'angle θ, exprimé en radians, est $r\theta$.

1) On choisit $R = 20$ cm.

a) Montrer que le volume du cône, en fonction de sa hauteur h, est $V(h) = \dfrac{1}{3}\pi\left(400 - h^2\right)h$.

b) Justifier qu'il existe une valeur de h qui rend le volume du cône maximum. Donner cette valeur.

c) Comment découper le disque en carton pour avoir un volume maximum ? Donner un arrondi de α au degré près.

2) L'angle α dépend-il du rayon R du disque en carton ?

Liban 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) a) D'après le théorème de Pythagore, $R^2 = h^2 + \ell^2$ et donc $\ell^2 = R^2 - h^2$. L'aire $\mathscr{A}$ est donc égale à $\pi\ell^2$ ou encore $\pi\left(R^2 - h^2\right)$ puis le volume du cône est

$$V(h) = \frac{1}{3}\mathscr{A}h = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - h^2\right)h = \frac{1}{3}\pi\left(400 - h^2\right)h.$$

b) Pour tout réel h de $[0, R]$, $V(h) = \frac{\pi}{3}\left(R^2h - h^3\right)$. La fonction V est dérivable sur $[0, R]$ et pour tout h de $[0, R]$,

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}\left(R^2 - 3h^2\right) = -\pi\left(h^2 - \frac{R^2}{3}\right) = -\pi\left(h - \frac{R}{\sqrt{3}}\right)\left(h + \frac{R}{\sqrt{3}}\right).$$

Pour $h \in [0, R]$, $V'(h)$ est du signe de $-\left(h - \frac{R}{\sqrt{3}}\right)$ avec $0 < \frac{R}{\sqrt{3}} < R$. Par suite, la fonction V' est strictement positive sur $\left[0, \frac{R}{\sqrt{3}}\right[$ et strictement négative sur $\left]\frac{R}{\sqrt{3}}, R\right]$. On en déduit que la fonction V est strictement croissante sur $\left[0, \frac{R}{\sqrt{3}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{R}{\sqrt{3}}, R\right]$.

La fonction V admet un maximum en $\frac{R}{\sqrt{3}}$ et ce volume maximum est

$$V\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - \frac{R^2}{3}\right)\frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} \times \frac{2R^2}{3} \times \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}.$$

Plus précisément, le volume maximum est $V\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right) = \frac{16\ 000\pi}{9\sqrt{3}} = 3225$ cm^3 arrondi au cm^3. Il est obtenu pour une hauteur

$$h = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}} = 11,6 \text{ cm arrondi au dixième de centimètre.}$$

c) Le périmètre du disque de base est $2\pi\ell$ et aussi $(2\pi - \alpha)R$. Donc $(2\pi - \alpha)R = 2\pi\ell$ puis $2\pi - \alpha = \frac{2\pi\ell}{R}$ et donc $\alpha = 2\pi - \frac{2\pi\ell}{R}$. Quand le volume est maximum, $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$ et donc $\ell = \sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = \sqrt{\frac{2R^2}{3}} = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$ et donc

$$\alpha = 2\pi - \frac{2\pi\frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}}{R} = 2\pi - \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \text{ radians,}$$

ou encore $\alpha = 66°$ arrondi au degré.

2) Le calcul de la question précédente montre que α ne dépend pas de R.

