EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Partie A

On considère l'algorithme suivant : Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Entrée	Saisir le nombre entier naturel non nul N
Traitement	Affecter à U la valeur 0 Pour k allant de 0 à $N-1$ Affecter à U la valeur $3U-2k+3$ Fin pour
Sortie	Afficher$U$.

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N=3$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=3u_n-2n+3$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.
b. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n=u_n-n+1$.
a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=3^n+n-1$.

5. Soit p un entier naturel non nul.

a. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$?
On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.
b. Justifier que $n_0 \leqslant 3p$.
c. Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p=3$.
d. Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

EXERCICE 3

Partie A

Si $N = 3$, k varie de 0 à 2.
Etape 1 $k = 0$ puis $U = 3 \times 0 - 2 \times 0 + 3 = 3$
Etape 2 $k = 1$ puis $U = 3 \times 3 - 2 \times 1 + 3 = 10$
Etape 3 $k = 2$ puis $U = 3 \times 10 - 2 \times 2 + 3 = 29$

L'affichage en sortie est donc 29.

Partie B

1) $u_1 = 3u_0 - 2 \times 0 + 3 = 3 \times 0 + 3 = 3$ et $u_2 = 3u_1 - 2 \times 1 + 3 = 3 \times 0 + 3 = 9 - 2 + 3 = 10$.

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

• Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et en particulier $u_0 \geqslant 0$. L'inégalité est donc vraie quand $n = 0$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \geqslant n$.

$$u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \geqslant 3n - 2n + 3 = n + 3 \geqslant n + 1.$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

b) Pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$. Donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2(u_n - n) + 3 \geqslant 3 \text{ (d'après la question précédente)}$$

et en particulier $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ ou encore $u_n \leqslant u_{n+1}$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) + 1 = 3u_n - 2n + 3 - n = 3u_n - 3n + 3 = 3(u_n - n + 1) = 3v_n.$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$.

b) $v_0 = u_0 - 0 + 1 = 1$ puis pour tout entier naturel n,

$$v_n = v_0 \times q^n = 3^n.$$

Mais alors, pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + n - 1 = 3^n + n - 1$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = 3^n + n - 1.}$$

5) a) Soit p un entier naturel non nul. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$.

b) Soit p un entier naturel non nul. $u_{3p} = 3^{3p} + 3p - 1 = 27^p + 3p - 1 \geqslant 10^p + 3 \times 1 - 1 \geqslant 10^p$ puis, pour $n \geqslant 3p$, $u_n \geqslant 10^p$ car la suite (u_n) est croissante.
Donc l'entier $3p$ est un rang à partir duquel on a $u_n \geqslant 10^p$. Puisque n_0 est le plus petit des rangs à partir duquel $u_n \geqslant 10^p$, on a $n_0 \leqslant 3p$.

c) $u_0 = 0 < 10^3$, $u_1 = 3 < 10^3$, $u_2 = 10 < 10^3$, $u_3 = 29 < 10^3$, $u_4 = 84 < 10^3$, $u_5 = 247 < 10^3$, $u_6 = 734 < 10^3$, $u_7 = 2193 \geqslant 10^3$. Donc, si $p = 3$ alors $n_0 = 7$.

d)

Entrée	Saisir le nombre entier naturel non nul p
Traitement	Affecter à N la valeur 0 Tant que $3 \wedge n + n - 1 < 10^p$ Affecter à N la valeur $N + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher$N$.

