EXERCICE 2 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

On considère la suite (I_n) définie pour n entier naturel non nul par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2}\, dx.$$

1. **a)** Soit g la fonction définie par $g(x) = xe^{x^2}$.
Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g.
b) En déduire la valeur de I_1.
c) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n.$$

d) Calculer I_3 et I_5

2. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$
Traitement	Tant que $n < 21$ Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}u$ Affecter à n la valeur $n + 2$
Sortie	Afficher u

Quel terme de la suite (I_n) obtient-on en sortie de cet algorithme ?

3. **a)** Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geqslant 0$.
b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
c) En déduire que la suite (I_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la valeur de ℓ.