EXERCICE 2

1) a) La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$G'(x) = \frac{1}{2} \times \left(x^2\right)' e^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2} = xe^{x^2} = g(x).$$

Donc la fonction G est une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

b) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e^1 - \frac{1}{2}e^0 = \frac{e-1}{2}$.

$$\boxed{I_1 = \frac{e-1}{2}.}$$

c) Soit n un entier naturel non nul. $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^1 x^{n+2}e^{x^2}\,dx = \int_0^1 x^{n+1} \times xe^{x^2}\,dx$.

Pour x dans $[0,1]$, posons $u(x) = x^{n+1}$ et $v(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,1]$ et pour x dans $[0,1]$, on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = x^{n+1} & v(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} \\ u'(x) = (n+1)x^n & v'(x) = xe^{x^2} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^1 x^{n+1} \times xe^{x^2}\,dx = \left[x^{n+1} \times \frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n \times \frac{1}{2}e^{x^2}\,dx = 1^{n+1} \times \frac{1}{2}e^1 - 0 \times \frac{1}{2}e^0 - \frac{n+1}{2}\int_0^1 x^n e^{x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n. \end{aligned}$$

d) $I_3 = \dfrac{e}{2} - \dfrac{1+1}{2}I_1 = \dfrac{e}{2} - \dfrac{e-1}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $I_5 = \dfrac{e}{2} - \dfrac{3+1}{2}I_3 = \dfrac{e}{2} - 2 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{e-2}{2}$.

$$\boxed{I_3 = \frac{1}{2} \text{ et } I_5 = \frac{e-2}{2}.}$$

2) n prend sucessivement les valeurs $1, 3, 5, \ldots, 19$.

- Quand $n = 1$, $u = I_1$ puis, comme $1 < 21$, $u = \frac{1}{2}e - \frac{1+1}{2}I_1 = I_3$ puis $n = 3$.
- Puisque $n = 3 < 21$, $u = \frac{1}{2}e - \frac{3+1}{2}I_3 = I_5$ puis $n = 5$.

$\vdots$

- Puisque $n = 17 < 21$, $u = \frac{1}{2}e - \frac{17+1}{2}I_{17} = I_{19}$ puis $n = 19$.
- Puisque $n = 19 < 21$, $u = \frac{1}{2}e - \frac{19+1}{2}I_{19} = I_{21}$ puis $n = 21$ et l'algorithme s'arrête.

Finalement, en sortie, on obtient I_{21}.

3) a) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0,1]$, $x^n e^{x^2} \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 x^n e^{x^2}\,dx \geqslant 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ I_n \geqslant 0.}$$

b) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} I_n - I_{n+1} &= \int_0^1 x^n e^{x^2}\,dx - \int_0^1 x^{n+1}e^{x^2}\,dx = \int_0^1 \left(x^n e^{x^2} - x^{n+1}e^{x^2}\right)dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 x^n(1-x)e^{x^2}\,dx. \end{aligned}$$

Or, pour tout réel x de $[0,1]$, $x^n(1-x)e^{x^2}\ dx \geqslant 0$ et donc $\int_0^1 x^n(1-x)e^{x^2}\ dx \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale ou encore $I_n - I_{n+1} \geqslant 0$.

On a montré que pour tout entier naturel non nul n $I_n - I_{n+1} \geqslant 0$ ou encore pour tout entier naturel non nul n $I_{n+1} \leqslant I_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ est décroissante.}}$$

c) La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite (I_n) est convergente vers un réel ℓ positif ou nul.

4) Supposons $\ell > 0$. D'après la question 1)c), pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3, $I_n = \frac{e}{2} - \frac{n-1}{2}I_{n-2}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n-2} = \ell > 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-1}{2}I_{n-2} = +\infty$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{2} - \frac{n-1}{2}I_{n-2} = -\infty$. Ceci est une contradiction et donc $\ell = 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

