

EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Les cinq questions sont indépendantes.

1. Dans un lycée donné, on sait que 55% des élèves sont des filles. On sait également que 35% des filles et 30% des garçons déjeunent à la cantine.
On choisit au hasard un élève du lycée.
Quelle est la probabilité que cet élève ne déjeune pas à la cantine.
2. Une urne contient dix jetons numérotés de 1 à 10, indiscernables au toucher. On tire 3 jetons simultanément.
Combien de tirages différents peut-on faire contenant au moins un jeton à numéro pair ?
3. Une variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{1}{5}$.
Calculer la probabilité que Y soit supérieure ou égale à 2. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} .
4. Un appareil ménager peut présenter parès sa fabrication deux défauts.
On appelle A l'événement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et F l'événement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».
On suppose que les événements A et F sont indépendants.
On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à 0,02 et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à 0,069.
On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut F ?
5. On considère l'algorithme :

A et C sont des entiers naturels, C prend la valeur 0 Répéter 9 fois A prend une valeur aléatoire entière entre 1 et 7. Si $A > 5$ alors C prend la valeur $C + 1$ Fin Si Fin répéter Afficher C.
--

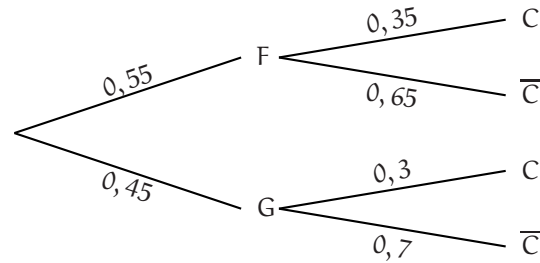
Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme précédent, on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur C affichée.

Quelle loi suit la variable X ? Préciser ses paramètres.

EXERCICE 4

1) On note F l'événement « l'élève choisi est une fille » et G l'événement « l'élève choisi est un garçon » (de sorte que $G = \bar{F}$). Enfin, on note C l'événement « l'élève déjeune à la cantine ». L'énoncé donne $p(F) = 0,55$ et donc $p(G) = 1 - 0,55 = 0,45$ puis $p_F(C) = 0,35$ (et donc $p_F(\bar{C}) = 1 - 0,35 = 0,65$) et $p_G(C) = 0,3$ (et donc $p_G(\bar{C}) = 1 - 0,3 = 0,7$).

Représentons la situation par un arbre.



La probabilité demandée est $p(\bar{C})$. D'après la formule des probabilités totales,

$$p(\bar{C}) = p(F \cap \bar{C}) + p(G \cap \bar{C}) = p(F) \times p_F(\bar{C}) + p(G) \times p_G(\bar{C}) = 0,55 \times 0,65 + 0,45 \times 0,7 = 0,6725$$

La probabilité que l'élève ne déjeune pas à la cantine est 0,6725.

2) Le nombre de tirages simultanés de trois jetons parmi les dix jetons de l'urne est

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 5 \times 3 \times 8 = 120.$$

Le nombre de tirages simultanés de trois jetons parmi les dix jetons de l'urne ne comportant aucun numéro pair est encore le nombre de tirages simultanés de trois jetons parmi les cinq jetons de l'urne qui portent un numéro impair. Ce nombre est

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} = 10.$$

Le nombre de tirages simultanés de trois jetons parmi les dix jetons de l'urne contenant au moins un numéro pair est la différence des deux nombres précédents c'est-à-dire $120 - 10 = 110$.

Il y a 110 tirages simultanés de 3 jetons comportant au moins un numéro pair.

3) On sait que pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq 20$,

$$p(Y = k) = \binom{20}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{20-k},$$

et donc

$$p(Y \geq 2) = 1 - p(Y = 0) - p(Y = 1) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{20} - 10 \times \left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{4}{5}\right)^{19} = 0,959\dots$$

$p(Y \geq 2) = 0,959$ à 10^{-3} près par défaut.

4) Posons plus simplement $p(F) = p$. L'énoncé donne $p(A) = 0,02$ et $p(A \cup F) = 0,069$. D'autre part, puisque les événements A et F sont indépendants, $p(A \cap F) = p(A) \times p(F) = 0,02p$.

$$0,069 = p(A \cup F) = p(A) + p(F) - p(A \cap F) = 0,02 + p - 0,02p = 0,02 + 0,98p,$$

et donc

$$p = \frac{0,069 - 0,02}{0,98} = \frac{0,049}{0,98} = \frac{49}{980} = \frac{1}{20} = 0,05.$$

$$p(F) = 0,05.$$

5) Dans cet algorithme, on recommence $n = 9$ fois une même expérience : choisir un nombre au hasard entre 1 et 7. A chaque expérience, on a deux éventualités : « le nombre obtenu est 6 ou 7 (le succès) » avec une probabilité $p = \frac{2}{7}$ ou « ne pas obtenir 6 ou 7 (l'échec) » avec une probabilité $1 - p = \frac{5}{7}$. De plus, au cours des 9 expériences, la probabilité d'obtenir 6 ou 7 ne varie pas en fonction des résultats précédemment obtenus ou encore les 9 expériences sont indépendantes les unes des autres.

La variable C est un compteur : à la fin des neuf expériences, la variable C contient le nombre de fois où on a obtenu un résultat égal à 6 ou 7 ou encore la variable X donne le nombre de succès en 9 tentatives. Finalement,

X suit une loi binomiale de paramètre $n = 9$ et $p = \frac{2}{7}$.