

Programme officiel : pour une fonction monotone positive, mettre en oeuvre un algorithme pour déterminer un encadrement d'une intégrale.

Exemple avec $f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$ pour $x \in [0, 1]$. Cette fonction est strictement décroissante sur $[0, 1]$. On ne sait pas calculer la valeur exacte de $\int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^2} dx$ et on calcule donc des valeurs approchées de $\int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^2} dx$ par la **méthode des rectangles**. La machine demande la précision p et restitue deux nombres SommeMin et SommeMax tels que

$$\text{SommeMin} \leq I = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^2} dx \leq \text{SommeMax} \quad \text{et} \quad \text{SommeMax} - \text{SommeMin} \leq 10^{-p}.$$

Quelques explications. Un minorant de I est $\text{SommeMin} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{e^{k/n}}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^2}$ que l'on calcule aux lignes 15

à 19.

Un majorant de I est $\text{SommeMax} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{k/n}}{\left(1 + \frac{k}{n}\right)^2} = \text{SommeMin} + \frac{1}{n} \left(\frac{e^0}{(1+0)^2} - \frac{e^1}{(1+1)^2} \right)$ que l'on calcule

à la ligne 20.

On veut $\frac{1}{n} \left(1 - \frac{e}{4}\right) \leq \frac{1}{10^p}$ et on prend par exemple

$$n = E \left(10^p \left(1 - \frac{e}{4} \right) \right) + 1.$$

Programme écrit avec Algobox.

```

1  VARIABLES
2  p EST_DU_TYPE NOMBRE
3  n EST_DU_TYPE NOMBRE
4  k EST_DU_TYPE NOMBRE
5  SommeMin EST_DU_TYPE NOMBRE
6  SommeMax EST_DU_TYPE NOMBRE
7  DEBUT_ALGORITHME
8  LIRE p
9  n PREND_LA_VALEUR floor(pow(10,p)*(1-exp(1)/4))+1
10 SommeMin PREND_LA_VALEUR 0
11 POUR k ALLANT_DE 1 A n
12   DEBUT_POUR
13   SommeMin PREND_LA_VALEUR SommeMin+exp(k/n)/(pow(1+k/n,2))
14   FIN_POUR
15 SommeMin PREND_LA_VALEUR SommeMin/n
16 SommeMax PREND_LA_VALEUR SommeMin+(1-exp(1)/4)/n
17 AFFICHER SommeMin
18 AFFICHER "<=I<="
19 AFFICHER SommeMax
20 FIN_ALGORITHME

```

Programme pour TI83+. Ce programme affiche une valeur approchée par défaut de $\int_0^1 \frac{e^x}{(1+x)^2} dx$ à 10^{-p} près.

```
PROGRAM: METHRECT
: Prompt P
: Int((10^P)*(1-e^(1/4))+1)→N
: 0→S
: For(K,1,N)
: S+e^(K/N)/((1+K/N)^2)→S
: End
: S/N→S
: Disp S
```