

Programme officiel : pour une fonction monotone positive, mettre en oeuvre un algorithme pour déterminer un encadrement d'une intégrale.

Exemple avec $f(x) = x^2$ pour $x \in [0, 1]$. Cette fonction est strictement croissante sur $[0, 1]$. On calcule des valeurs approchées de $\int_0^1 x^2 dx$ par la **méthode des rectangles**. La machine demande la précision p et restitue deux nombres SommeMin et SommeMax tels que

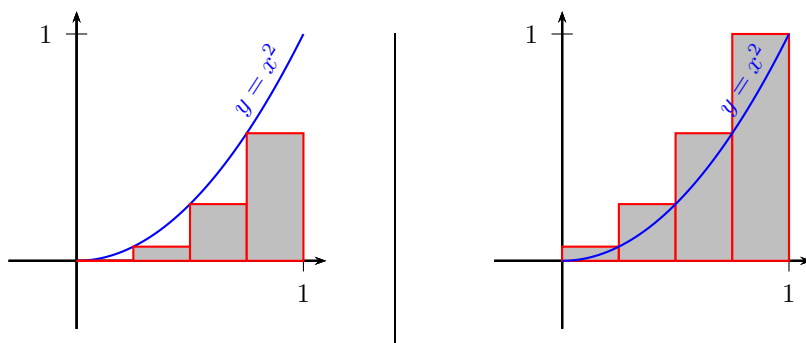
$$\text{SommeMin} \leq I = \int_0^1 x^2 dx \leq \text{SommeMax} \quad \text{et} \quad \text{SommeMax} - \text{SommeMin} = 10^{-p}.$$

Quelques explications. On découpe l'intervalle $[0, 1]$ en n parties égales : $\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$.

Un minorant de I est $\text{SommeMin} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2$ que l'on calcule aux lignes 8 à 13.

Un majorant de I est $\text{SommeMax} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \text{SommeMin} + \frac{1}{n}$ que l'on calcule à la ligne 14.

Puisque $\text{SommeMax} - \text{SommeMin} = \frac{1}{n}$ et que l'on veut $\text{SommeMax} - \text{SommeMin} = 10^{-p} = \frac{1}{10^p}$, on prend directement $n = 10^p$.



Programme écrit avec Algobox.

```

1  VARIABLES
2  p EST_DU_TYPE NOMBRE
3  k EST_DU_TYPE NOMBRE
4  SommeMin EST_DU_TYPE NOMBRE
5  SommeMax EST_DU_TYPE NOMBRE
6  DEBUT_ALGORITHME
7  LIRE p
8  SommeMin PREND_LA_VALEUR 0
9  POUR k ALLANT_DE 0 A pow(10,p)-1
10  DEBUT_POUR
11  SommeMin PREND_LA_VALEUR SommeMin+pow(k/pow(10,p),2)
12  FIN_POUR
13  SommeMin PREND_LA_VALEUR SommeMin/pow(10,p)
14  SommeMax PREND_LA_VALEUR SommeMin+pow(10,-p)
15  AFFICHER SommeMin
16  AFFICHER "<=I<="
17  AFFICHER SommeMax
18  FIN_ALGORITHME

```

Programme pour TI83+. Ce programme affiche une valeur approchée par défaut de I à 10^{-P} près.

```
PROGRAM: METHRECT
: Prompt P
: 0→S
: For(k,0,10^P-1)
: S+(k/10^P)^2→S
: End
: S/10^P→S
: Disp S
```