

Programme officiel : pour une fonction monotone positive, mettre en oeuvre un algorithme pour déterminer un encadrement d'une intégrale.

Exemple avec $f(x) = e^{x^2}$ pour $x \in [a, b]$ (avec $0 \leq a \leq b$). Cette fonction est strictement croissante sur $[a, b]$. On ne sait pas calculer la valeur exacte de $\int_a^b e^{x^2} dx$ et on calcule donc des valeurs approchées de $\int_a^b e^{x^2} dx$ par la **méthode des rectangles**. La machine demande a, b et la précision p et restitue deux nombres SommeMin et SommeMax tels que

$$\text{SommeMin} \leq I = \int_a^b e^{x^2} dx \leq \text{SommeMax} \quad \text{et} \quad \text{SommeMax} - \text{SommeMin} \leq 10^{-p}.$$

Quelques explications. On divise $[a, b]$ en n parties égales : $\left[a, a + \frac{b-a}{n} \right], \left[a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n} \right], \dots, \left[a + k\frac{b-a}{n}, a + (k+1)\frac{b-a}{n} \right], \dots, \left[a + (n-1)\frac{b-a}{n}, b \right]$, toutes de longueur $\frac{b-a}{n}$.

Un minorant de I est $\text{SommeMin} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ que l'on calcule de la ligne 14 à la ligne 19.

Un majorant de I est $\text{SommeMax} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \text{SommeMin} + \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$ que l'on calcule à la ligne 20.

Puisque $\text{SommeMax} - \text{SommeMin} = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n}$ et que l'on veut $\text{SommeMax} - \text{SommeMin} \leq \frac{1}{10^p}$, on choisit pour n un entier supérieur ou égal à $10^p(b-a)(f(b) - f(a))$ comme par exemple

$$n = E(10^p(b-a)(f(b) - f(a))) + 1.$$

Programme écrit avec Algobox.

```

1  VARIABLES
2  a EST_DU_TYPE NOMBRE
3  b EST_DU_TYPE NOMBRE
4  p EST_DU_TYPE NOMBRE
5  n EST_DU_TYPE NOMBRE
6  k EST_DU_TYPE NOMBRE
7  SommeMin EST_DU_TYPE NOMBRE
8  SommeMax EST_DU_TYPE NOMBRE
9  DEBUT_ALGORITHME
10 LIRE a
11 LIRE b
12 LIRE p
13 n PREND_LA_VALEUR floor(pow(10,p)*(b-a)*(exp(pow(b,2))-exp(pow(a,2))))+1
14 SommeMin PREND_LA_VALEUR 0
15 POUR k ALLANT_DE 0 A n-1
16   DEBUT_POUR
17   SommeMin PREND_LA_VALEUR SommeMin+exp(pow(a+(k*(b-a)/n),2))
18   FIN_POUR
19 SommeMin PREND_LA_VALEUR SommeMin*(b-a)/n
20 SommeMax PREND_LA_VALEUR SommeMin+(b-a)*(exp(pow(b,2))-exp(pow(a,2)))/n
21 AFFICHER SommeMin
22 AFFICHER "<=I<="
23 AFFICHER SommeMax
24 FIN_ALGORITHME

```

Remarque. Avec la fonction $f : x \mapsto e^{x^2}$, les capacités de calculs d'Algobox sont vite dépassées dès qu'on prend b un peu grand.

Programme pour TI83+. Ce programme affiche une valeur approchée par défaut de $\int_a^b e^{x^2} dx$ à 10^{-p} près (quand $0 \leq a \leq b$).

```
PROGRAM: METHRECT
: Prompt A
: Prompt B
: Prompt P
: Int((10^P)*(B-A)*(e^(B^2)-e^(A^2)))+1→N
: 0→S
: For(K,0,N-1)
: S+e^((A+K*(B-A)/N)^2)→S
: End
: S*(B-A)/N→S
: Disp S
```