France métropolitaine, Réunion 2019. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{x}+e^{-x}\right) = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right) = -\infty$ et finalement

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)\right) = -\infty.$$

b) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = 0-\frac{1}{2}\left(e^{x}+(-1)e^{-x}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right).$$

Soit $x > 0$. Alors, $x > -x$ puis $e^{x} > e^{-x}$ par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $e^{x}-e^{-x} > 0$ puis que $f'(x) < 0$.

Ainsi, la fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et sa dérivée est strictement négative sur $]0,+\infty[$. On sait alors que la fonction f est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

c) La fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$. De plus, $f(0) = \dfrac{5}{2} > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty < 0$. D'après un corollaire au théorème des valeurs intermédiaires, on sait que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0,+\infty[$. On note α cette solution.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(-x) = \dfrac{7}{2}-\dfrac{1}{2}\left(e^{-x}+e^{x}\right) = f(x)$.

Soit maintenant $x < 0$. Alors, $-x > 0$ puis

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = 0 \Leftrightarrow -x = \alpha \Leftrightarrow x = -\alpha.$$

L'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $]-\infty,0]$ et même $]-\infty,0[$, à savoir $-\alpha$. Finalement, l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$, exactement deux solutions, opposées l'une à l'autre.

Partie B

1) $f(0) = \dfrac{5}{2} = 2,5$. Donc, la hauteur d'un arceau est $2,5$ m.

2) a) D'après la question 1)b) de la partie A, pour tout $x \in [0,\alpha]$, $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)$. Donc, pour tout $x \in [0,\alpha]$,

$$\begin{aligned}
1+\left(f'(x)\right)^2 &= 1+\frac{1}{4}\left(e^{x}-e^{-x}\right)^2 = 1+\frac{1}{4}\left(\left(e^{x}\right)^2-2\times e^{x}\times e^{-x}+\left(e^{-x}\right)^2\right)\\
&= \frac{4}{4}+\frac{1}{4}\left(\left(e^{x}\right)^2-2+\left(e^{-x}\right)^2\right) = \frac{1}{4}\left(\left(e^{x}\right)^2+2+\left(e^{-x}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(e^{x}+e^{-x}\right)^2.
\end{aligned}$$

b) Pour $x \in [0,\alpha]$, $e^{x}+e^{-x} \geqslant 0$ et donc $\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2} = \dfrac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$. Par suite,

$$I = \int_0^{\alpha}\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)\,dx = \left[\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)\right]_0^{\alpha} = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha}-e^{-\alpha}\right)-\frac{1}{2}\left(e^{0}-e^{0}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha}-e^{-\alpha}\right).$$

Par symétrie, la longueur d'un arceau est $2\times I$ ou encore $e^{\alpha}-e^{-\alpha}$.

Partie C

1) L'unité d'aire est ici le mètre carré. L'aire, exprimée en mètre carré, d'une facade est $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx$ ou encore $2\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$ pour des raisons de symétrie. L'aire des deux facades est donc $4\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$. On retire à la facade sud un rectangle de dimensions 1 m et 2 m et donc d'aire 2 m^2. Finalement, la quantité de bâche nécessaire pour recouvrir les facades nord et sud est $4\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,dx-2$.

2) D'autre part, la partie supérieure, une fois mise au sol est un rectangle de longueur $3 \times 1,5 = 4,5 = \frac{9}{2}$ mètres et de largueur la longueur d'un arceau calculée à la partie B. Donc, l'aire du toit de la serre est $\frac{9}{2}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right)$ puis l'aire de la bâche est

$$4\int_0^{\alpha} f(x)\,dx - 2 + \frac{9}{2}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right).$$

Ensuite,

$$\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \int_0^{\alpha} \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)\right)dx = \left[\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)\right]_0^{\alpha} = \frac{7\alpha}{2} - \frac{1}{2}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right)$$

Finalement, l'aire demandée est :

$$4\left(\frac{7\alpha}{2} - \frac{1}{2}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right)\right) - 2 + \frac{9}{2}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right) = 14\alpha - 2 + \frac{5}{2}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right).$$

En prenant $1,92$ pour valeur approchée de α, on obtient une aire de 42 m^2 au mètre carré près.

EXERCICE 2

Partie A

1) a) La durée moyenne d'une partie du type A est $E(X_A)$. La variable aléatoire X_A suit la loi uniforme sur $[9;25]$. Donc, l'espérance de X_A est

$$E(X_A) = \frac{9+25}{2} = 17.$$

b) La durée moyenne d'une partie du type B est $E(X_B)$. Cette espérance est l'abscisse du sommet de la courbe fournie par l'énoncé. Donc,

$$\mu = E(X_B) = 17.$$

2) Notons A l'événement « on choisit le type A », B l'événement « on choisit le type B » et X la variable aléatoire égale à la durée de jeu exprimée en minutes. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(X \leqslant 20) = P(A) \times P_A(X \leqslant 20) + P(B) \times P_B(X \leqslant 20) = \frac{1}{2} \times P(X_A \leqslant 20) + \frac{1}{2} \times P(X_B \leqslant 20).$$

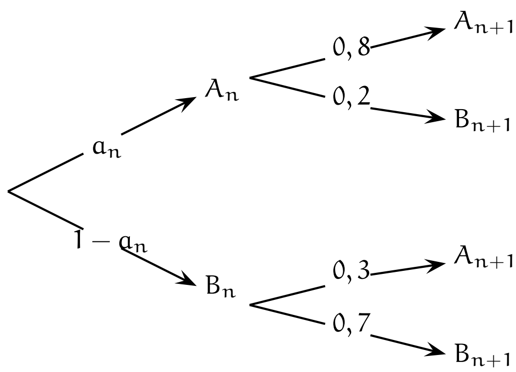
Maintenant, $P(X_A \leqslant 20) = \dfrac{20-9}{25-9} = \dfrac{11}{16} = 0,6875$. D'autre part, la calculatrice fournit $P(X_B \leqslant 20) = 0,841\ldots$ Donc,

$$P(X \leqslant 20) = \frac{1}{2}(0,6875 + 0,841\ldots) = 0,76 \text{ arrondi au centième.}$$

La probabilité que la durée d'une partie soit inférieure à 20 minutes est $0,76$ arrondi au centième.

Partie B

1) a) Arbre recopié et complété.



b) Soit n un entier naturel. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) = 0,8a_n + 0,3(1-a_n) \\ &= 0,5a_n + 0,3. \end{aligned}$$

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$.

- $a_1 = a = 0,5$ et donc $0 \leqslant a_1 \leqslant 0,6$. L'encadrement à démontrer est vrai quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$. Alors, $0,5 \times 0 + 0,3 \leqslant 0,5 \times a_n + 0,3 \leqslant 0,5 \times 0,6 + 0,3$ ou encore $0,3 \leqslant a_{n+1} \leqslant 0,6$ et en particulier $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant 0,6$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$.

b) Soit n un entier naturel non nul. $a_{n+1} - a_n = 0,5a_n + 0,3 - a_n = 0,3 - 0,5a_n = 0,5(0,6 - a_n)$. D'après la question précédente, $a_n \leqslant 0,6$ et donc $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$.
On a montré que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} \geqslant a_n$ et donc que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

c) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par $0,6$. Donc, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Notons ℓ sa limite. Pour tout entier naturel non nul n, on a $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\ell = 0,5\ell + 0,3$. Par suite, $0,5\ell = 0,3$ puis $\ell = 0,6$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0,6$.

3) a) Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1} = a_{n+1} - 0,6 = 0,5u_n + 0,3 - 0,6 = 0,5u_n - 0,3 = 0,5\,(a_n - 0,6) = 0,5u_n.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $0,5$.

b) On en déduit que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = 0,5^{n-1}u_1 = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1}$ puis

$$a_n = u_n + 0,6 = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6.$$

c) Puisque $-1 < 0,5 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^{n-1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0,6$. Cette limite ne dépend pas de la valeur de a.

d) Puisque le joueur s'adonne intensivement aux jeux vidéo, il joue à un grand nombre n de parties. Or, pour n grand, la probabilité que le joueur joue une partie de type A est $0,6$ et $0,4$ pour une partie de type B avec $0,4 < 0,6$. La publicité la plus vue devrait donc être celle insérée en début des parties de type A.

EXERCICE 3

1) Le discriminant de l'équation (E) est

$$\Delta = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4\times 1\times 4 = 4\times 3 - 16 = -4 = (2i)^2.$$

L'équation (E) admet deux solutions complexes non réelles conjuguées : $a = \dfrac{2\sqrt{3}+2i}{2} = \sqrt{3}+i$ et $b = \overline{a} = \sqrt{3}-i$. Soient A et B les points du plan d'affixes respectives a et b.

Ensuite, $OA = |a| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$ et $OB = |b| = |\overline{a}| = 2$. Enfin,

$$BA = |a-b| = \left|\sqrt{3}+i-\sqrt{3}+i\right| = |2i| = 2.$$

Ainsi, $OA = OB = BA = 2$ et donc le triangle OAB est équilatéral.

L'affirmation 1 est vraie.

2) $|u| = |a| = 2$ puis

$$u = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
u^{2019}+\overline{u}^{2019} &= \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2019} + \left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{2019} = 2^{2019}\left(e^{i\frac{2019\pi}{6}} + e^{-i\frac{2019\pi}{6}}\right)\\
&= 2^{2019}\left(\cos\left(\frac{2019\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{2019\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{2019\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{2019\pi}{6}\right)\right)\\
&= 2^{2020}\cos\left(\frac{2019\pi}{6}\right) = 2^{2020}\cos\left(\frac{(3+168\times 12)\pi}{6}\right) = 2^{2020}\cos\left(\frac{3\pi}{6}+168\times 2\pi\right)\\
&= 2^{2020}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

En particulier, $u^{2019}+\overline{u}^{2019} \neq 2^{2019}$.

L'affirmation 2 est fausse.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour $x \geqslant 0$,

$$f_n'(x) = 1\times e^{-nx+1} + x\times\left(-ne^{-nx+1}\right) = (1-nx)e^{-nx+1}.$$

Pour tout $x \geqslant 0$, $e^{-nx+1} > 0$ et donc $f_n'(x)$ est du signe de $1-nx$. Or, $1-nx > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{n}$ et $1-nx = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{n}$. Donc, la fonction f_n' est positive sur $\left[0,\dfrac{1}{n}\right]$ (en tenant compte de $\dfrac{1}{n} > 0$) et négative sur $\left[\dfrac{1}{n},+\infty\right[$. La fonction f_n est croissante sur $\left[0,\dfrac{1}{n}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{1}{n},+\infty\right[$. La fonction f_n admet donc un maximum sur $[0,+\infty[$, atteint en $\dfrac{1}{n}$.

L'affirmation 3 est vraie.

4) Pour tout réel x, $|f(x)| = |\cos(x)|e^{-x} \leqslant 1\times e^{-x} = e^{-x}$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. La courbe $\mathscr{C}$ admet donc l'axe des abscisses pour asymptote en $+\infty$.

L'affirmation 4 est vraie.

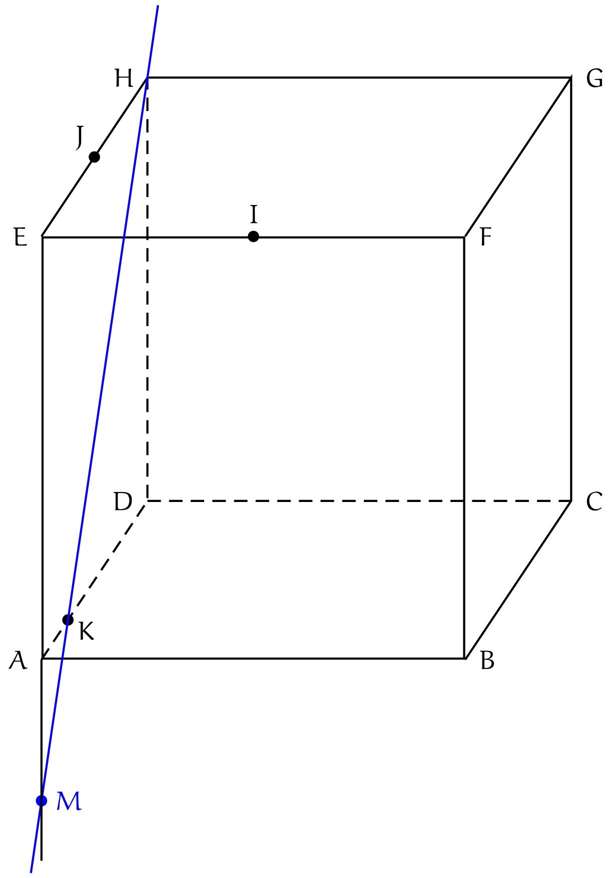
5) En fin d'exécution, $I = 15$. La dernière boucle du programme est 1) $2^{14} \leqslant A$, 2) $I = 15$ 3) $2^{15} > A$ car le programme s'arrête avec $I = 15$. Donc, $2^{14} \leqslant A < 2^{15}$. Par croissance du logarithme népérien sur $]0,+\infty[$, on en déduit que $14\ln(2) \leqslant \ln(A) < 15\ln(2)$.

L'affirmation 5 est fausse.

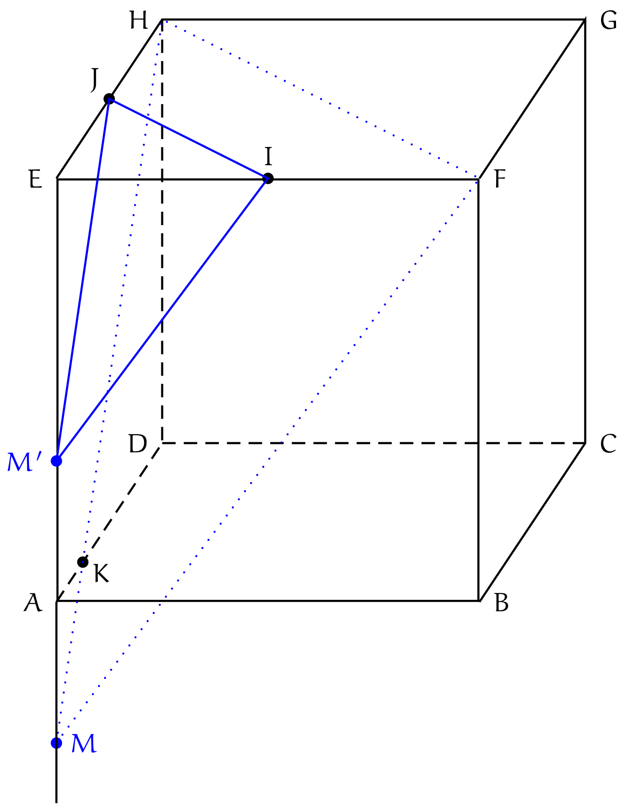
EXERCICE 4.

Partie A

1) Construction de M.



2) Construction de la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.



Partie B

1) a) Les points F, H et K ont pour coordonnées respectives $(1;0;1)$, $(0;1;1)$ et $(0;0,25;0)$. Le vecteur $\overrightarrow{FH}$ a pour coordonnées $(-1;1;0)$ et le vecteur $\overrightarrow{FK}$ a pour coordonnées $(-1;0,25;-1)$.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{FH} = 4 \times (-1) + 4 \times 1 + (-3) \times 0 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{FK} = 4 \times (-1) + 4 \times 0,25 + (-3) \times (-1) = -4 + 1 + 3 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FK}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (FHK). Donc, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (FHK).

b) Le plan (FHK) est le plan passant par $F(1;0;1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(4;4;-3)$. Une équation cartésienne du plan (FHK) est $4(x-1)+4(y-0)+(-3)(z-1) = 0$ ou encore $4x+4y-3z-1 = 0$.

c) Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$. Le plan $\mathscr{P}$ est le plan passant par $I\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(4;4;-3)$. Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est $4\left(x-\frac{1}{2}\right)+4(y-0)+(-3)(z-1) = 0$ ou encore

$$4x+4y-3z+1 = 0.$$

d) Soit $N(0,0,z)$ un point de (AE).

$$N \in \mathscr{P} \Leftrightarrow -3z+1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{3}.$$

Le point M′ a pour coordonnées $\left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$.

2) a) La droite Δ est la droite passant par $E(0,0,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(4,4,-3)$. Une représentation paramétrique de Δ est

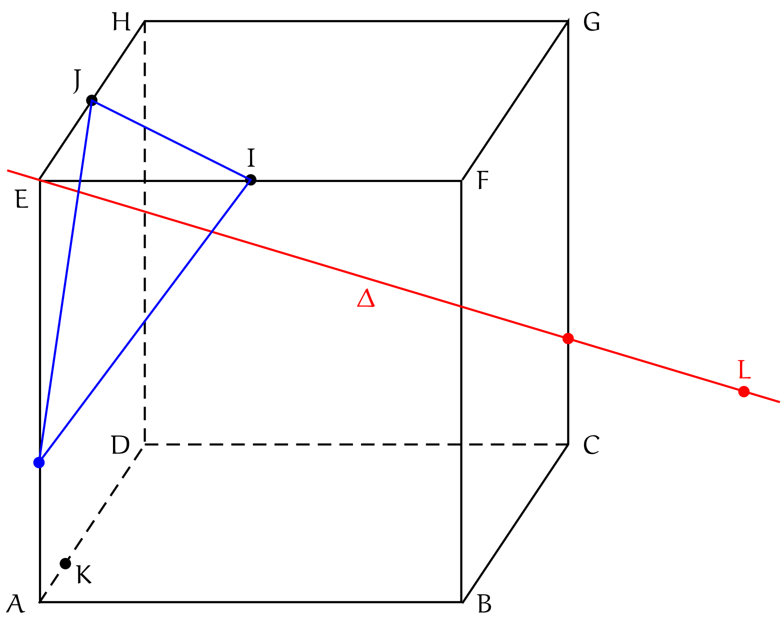
$$\left\{\begin{array}{l} x = 4t \\ y = 4t \\ z = 1-3t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

b) (ABC) est le plan d'équation $z = 0$. Soit $M(4t, 4t, 1-3t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow 1-3t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Pour $t = \frac{1}{3}$, on obtient les coordonnées du point L : $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 0\right)$.

c) Construction de Δ.



d) Les points de la droite (BF) sont les points de coordonnées $(1, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$. Soit $M(4t, 4t, 1-3t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ. Si $M \in (BF)$, alors $4t = 1$ et $4t = 0$ ce qui est impossible. Donc, les droites Δ et (Bf) ne sont pas sécantes.

Les points de la droite (CG) sont les points de coordonnées $(1, 1, z)$, $z \in \mathbb{R}$. Soit $M(4t, 4t, 1-3t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ.

$$M \in (CG) \Leftrightarrow 4t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}.$$

Donc, les droites Δ et (CG) sont sécantes. Pour $t = \frac{1}{4}$, on obtient les coordonnées du point d'intersection : $\left(1, 1, \frac{1}{4}\right)$.

