Rochambeau 2018. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A - Démonstration préliminaire

1) La fonction G est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour $t \geqslant 0$,

$$G'(t) = (-1)e^{-0,2t} - (-t-5)(-0,2)e^{-0,2t} = (0,2t+1-1)e^{-0,2t} = 0,2te^{-0,2t} = g(t).$$

Donc, la fonction G est une primitive de la fonction g sur $[0,+\infty[$.

2) Soit $x > 0$.

$$\int_0^x 0,2te^{-0,2t}\,dt = \left[(-t-5)e^{-0,2t}\right]_0^x = \left((-x-5)e^{-0,2x}\right) - \left(-5e^0\right) = 5 - xe^{-0,2x} - 5e^{-0,2x}.$$

Ensuite, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0,2x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$. D'autre part, pour $x > 0$,

$$xe^{-0,2x} = \frac{x}{e^{0,2x}} = \frac{1}{0,2}\frac{0,2x}{e^{0,2x}} = 5 \times \frac{1}{e^{0,2x}/(0,2x)}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{0,2x}}{0,2x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ d'après un théorème de croissances comparées et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 5 \times \dfrac{1}{e^{0,2x}/(0,2x)} = 5 \times 0 = 0$. Finalement

$$E(X) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x 0,2te^{-0,2t}\,dt = 5 - 0 - 5 \times 0 = 5.$$

Partie B - Etude de la durée de présence d'un client dans le supermarché

1) $P(T < 10) = P(T \leqslant 10) = P(T - 40 \leqslant -30) = P\left(\dfrac{T-40}{\sigma} \leqslant -\dfrac{30}{\sigma}\right)$ où cette fois-ci la variable $\dfrac{T-40}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite. L'énoncé donne $P\left(\dfrac{T-40}{\sigma} \leqslant -\dfrac{30}{\sigma}\right) = 0,067$. La calculatrice fournit alors $-\dfrac{30}{\sigma} = -1,5$ à 10^{-2} près puis $\sigma = 20$ à 10^{-1} près et en particulier, $\sigma = 20$ min à la seconde près (une seconde étant un soixantième de minute et un soixantième de minute étant plus grand qu'un centième de minute).

2) La probabilité demandée est $P(T \geqslant 60) = 1 - P(T < 60) = 1 - P(T \leqslant 60)$. La calculatrice fournit

$$P(T \geqslant 60) = 0,159 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

Partie C - Durée d'attente pour le paiement

1) a) La durée moyenne d'attente, exprimée en minutes, est l'espérance déterminée dans la partie A. Cette durée moyenne d'attente est de 5 minutes.

b) Notons T_1 la variable aléatoire égale au temps d'attente exprimé en minutes. Soit t un réel positif.

$$P(T_1 \leqslant t) = \int_0^t 0,2e^{-0,2x}\,dx = \left[-e^{-0,2x}\right]_0^t = \left(-e^{-0,2t}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-0,2t},$$

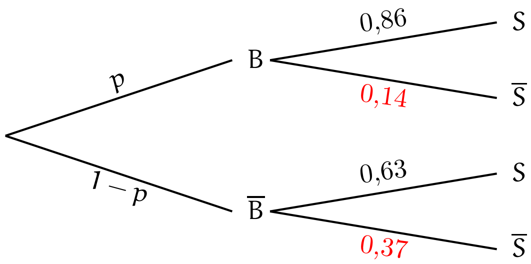
puis

$$P(T_1 \geqslant t) = P(T_1 > t) = 1 - P(T_1 \leqslant t) = 1 - \left(1 - e^{-0,2t}\right) = e^{-0,2t}.$$

La probabilité demandée est

$$P(T_1 \geqslant 10) = e^{-0,2\times10} = e^{-2} = 0,135 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

2) Notons p la proportion de clients à déterminer ou encore posons $p = P(B)$. Représentons la situation par un arbre de probabilités.



D'après la formule des probabilités totales,

$$P(S) = P(B) \times P_B(S) + P\left(\overline{B}\right) \times P_{\overline{B}}(S) = p \times 0,86 + (1-p) \times 0,63 = 0,23p + 0,63.$$

Par suite,

$$P(S) \geqslant 0,75 \Leftrightarrow 0,23p + 0,63 \geqslant 0,75 \Leftrightarrow p \geqslant \frac{0,12}{0,23} \Leftrightarrow p \geqslant \frac{12}{23}.$$

La proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique est $\frac{12}{23}$ soit environ $52,2\%$.

Partie D - Bons d'achat

1) Le client obtient 15 cartes.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cartes gagnantes obtenues par le client. 15 expériences identiques sont effectuées à savoir tirer 15 fois une carte. Puisque le tirage est assimilé à un tirage avec remise, les 15 expériences sont indépendantes. Chaque expérience a deux issues à savoir « la carte tirée est gagnante » avec une probabilité $p = 0,005$ et « la carte tirée n'est pas gagnante » avec une probabilité $1 - p = 0,995$.

La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,005$. La probabilité demandée est $P(X \geqslant 1)$.

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{15}{0}(0,005)^0(0,995)^{15} = 1 - (0,995)^{15} = 0,07 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

2) On reprend les notations de la question précédente où cette fois-ci n est un entier naturel non nul quelconque.

$$\begin{aligned}
P(X \geqslant 1) \geqslant 0,5 &\Leftrightarrow 1 - 0,995^n \geqslant 0,5 \Leftrightarrow 0,995^n \leqslant 0,5 \\
&\Leftrightarrow \ln\left(0,995^n\right) \leqslant \ln(0,5) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln(0,995) \leqslant \ln(0,5) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,995)} \text{ (car } \ln(0,995) < 0) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 138,2\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 139 \text{ (car } n \text{ est un entier.)}
\end{aligned}$$

On obtient 139 cartes pour un montant d'achat de 1390 euros. A partir de 1390 euros d'achat, on a au moins une chance sur deux d'obtenir une carte gagnante.

EXERCICE 2

1) Etudions les variations de la fonction f sur $[0,1[$. Pour $x \in [0,1[$,

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-bx+b-2}{1-x} > 0 \Leftrightarrow -bx+b-2 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{b-2}{b} \Leftrightarrow x < 1-\frac{2}{b},$$

et de même, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1-\frac{2}{b}$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1-\frac{2}{b}$.

De plus,

$$b \geqslant 2 \Rightarrow 0 < \frac{2}{b} \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant -\frac{2}{b} < 0 \Rightarrow 0 \leqslant 1-\frac{2}{b} < 1.$$

Si $b > 2$, la fonction f est strictement croissante sur $\left[0, 1-\frac{2}{b}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[1-\frac{2}{b}, 1\right]$ et si $b = 2$, $1-\frac{2}{b} = 0$ et f est strictement décroissante sur $[0,1[$.

Dans tous les cas, le maximum de f est

$$f\left(1-\frac{2}{b}\right) = b\left(1-\frac{2}{b}\right) + 2\ln\left(1-\left(1-\frac{2}{b}\right)\right) = b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right).$$

2) Il n'est pas envisageable de résoudre de manière exacte l'inéquation $b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right) \leqslant 1,6$.

Pour $x \in [2,+\infty[$, posons $g(x) = x-2+2\ln\left(\frac{2}{x}\right) = x-2+2\ln 2-2\ln x$. La fonction g est dérivable sur $[2,+\infty[$ et pour $x \geqslant 2$,

$$g'(x) = 1-\frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}.$$

La fonction g' est strictement positive sur $]2,+\infty[$ et donc la fonction g est strictement croissante sur $[2,+\infty[$. Puisque de plus, g est continue sur $[2,+\infty[$, que $g(2) = 0$ et que $g(10) = 4,7\ldots > 1,6$, un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires montre que g prend une fois et une seule la valeur $1,6$ en un certain x_0 de $[2,+\infty[$.

La calculatrice fournit $g(5,69) = 1,59\ldots < 1,6$ et $g(5,7) = 1,605\ldots > 1,6$. Puisque g est strictement croissante sur $[2,+\infty[$, on en déduit que $5,69 < x_0 < 5,7$. L'ensemble des valeurs de b pour lesquelles la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre est $[2, x_0]$ où $x_0 = 5,69$ à 10^{-2} près.

3) Le coefficient directeur de la tangente à la trajectoire en son point d'abscisse 0 est

$$f'(0) = \frac{-5,69 \times 0 + 5,69 - 2}{1-0} = 3,69.$$

Par suite, $\tan(\theta) = 3,69$ puis $\theta = 74,8°$ au dixième de degré près.

EXERCICE 3

1) a) La droite (AB) est la droite passant par le point A de coordonnées $(0,0,0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $(5,-4,1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (AB) est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 5t \\ y = -4t \\ z = t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

La droite (CD) est la droite passant par le point C de coordonnées $(-1,-8,5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ de coordonnées $(5,4,1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (AB) est

$$\left\{\begin{array}{l} x = -1+5t' \\ y = -8+4t' \\ z = 5+t' \end{array}\right., \ t' \in \mathbb{R}.$$

b) Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires car s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$, alors $5 = 5k$ et donc $k = 1$ et aussi $4 = -4k$ et donc $k = -1$, ce qui est impossible. Donc, les droites (AB) est (CD) sont sécantes ou non coplanaires. Vérifions que ces deux droites ne sont pas sécantes.

Soient $M(5t,-4t,t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (AB) et $M' = (-1+5t',-8+4t',5+t')$, $t' \in \mathbb{R}$, un point de (CD).

$$M = M' \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5t = -1+5t' \\ -4t = -8+4t' \\ t = 5+t' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = t-5 \\ 5t = -1+5(t-5) \\ -4t = -8+4(t-5) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = t-5 \\ 0 \times t = -26 \\ \dots \end{array}\right. .$$

Le système précédent n'a pas de solution et donc les droites (AB) et (CD) n'ont pas de point commun. On en déduit que les droites (AB) et (CD) sont non coplanaires.

2) a) Soit $M(5t,-4t,t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (AB). $x_M = 5 \Leftrightarrow 5t = 5 \Leftrightarrow t = 1$. Le point I a donc pour coordonnées $(5,-4,1)$.

Soit $M'(-1+5t',-8+4t',5+t')$, $t' \in \mathbb{R}$, un point de la droite (CD). $x_{M'} = 4 \Leftrightarrow -1+5t' = 4 \Leftrightarrow t' = 1$. Le point J a donc pour coordonnées $(4,-4,6)$. Par suite,

$$IJ = \sqrt{(4-5)^2 + (-4+4)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{26}.$$

b) Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $(-1,0,5)$.

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{u} = (-1) \times 5 + 0 \times (-4) + 5 \times 1 = 0$$

Donc, la droite (IJ) est orthogonale à la droite (AB) puis la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (AB) car les droites (AB) et (IJ) ont le point I en commun.

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{v} = (-1) \times 5 + 0 \times 4 + 5 \times 1 = 0.$$

Donc, la droite (IJ) est orthogonale à la droite (CD) puis la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (CD) car les droites (CD) et (IJ) ont le point J en commun.

Finalement, la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).

3) a) Puisque le point M' est sur la droite (CD) et n'est pas le point I, le point M' n'appartient pas à la droite (IJ) (le seul point commun entre la droite (IJ) et la droite (CD) étant le point I). Les points I, J et M' définissent donc un unique plan.
Puisque les droites (CD) et Δ sont parallèles, les droites (CD) et Δ sont coplanaires : ces droites sont contenues dans le plan (IJM').
Dans ce plan, la droite (IJ) est sécante à la droite Δ en I et donc la parallèle à (IJ) passant par M' est sécante à la droite Δ en un point noté P.

b) Pour les mêmes raisons que ci-dessus, les points P et M sont distincts et tous deux distincts de I. Les points P, M et I définissent un unique plan.
La droite $(M'P)$ est parallèle à la droite (IJ) et la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite Δ. Donc, la droite $(M'P)$ est orthogonale à la droite Δ. D'autre part, la droite $(M'P)$ est parallèle à la droite (IJ) et la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (AB). Donc la droite $(M'P)$ est orthogonale à la droite (AB).
Ainsi, la droite $(M'P)$ est orthogonale aux droites Δ et (AB) qui sont deux droites sécantes du plan (IMP). On en déduit que la droite $(M'P)$ est perpendiculaire au plan (IMP). Mais alors, la droite $(M'P)$ est orthogonale à toute droite du plan (IMP) et en particulier, la droite $(M'P)$ est perpendiculaire à la droite (MP). On a montré que le triangle IMP est rectangle en P.

c) Les droites (JM') et (IP) sont parallèles et les droites (JI) et $(M'P)$ sont parallèles. Le quadrilatère $M'JIP$ est donc un parallélogramme puis $M'P = JI$. D'après le théorème de Pythagore,

$$MM' = \sqrt{M'P^2 + PM^2} >= \sqrt{M'P^2} = M'P = IJ.$$

Ainsi, si M et M' sont des points de (AB) et (CD) respectivement, avec $M \neq I$ et $M' \neq J$, alors $MM' > IJ$.
De manière analogue, si $M = I$ et $M' \neq J$, $MM' > IJ$ et si $M \neq I$ et $M' = J$, $MM' > IJ$.

IJ est la plus courte distance entre un point de la droite (AB) et un point de la droite (CD).

EXERCICE 4.

Partie A - Un modèle simple

1) a) Pour tout entier naturel n,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1u_n - 2\,000v_n \\ 2\times 10^{-5}u_n + 0,6v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & -2\,000 \\ 2\times 10^{-5} & 0,6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1,1 & -2\,000 \\ 2\times 10^{-5} & 0,6 \end{pmatrix}$ convient. D'autre part,

$$U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,000\,000 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

b) Le nombre de campagnols au 1er juillet 2018 est u_6 et le nombre de renards est v_6. La calculatrice fournit

$$\begin{pmatrix} u_6 \\ v_6 \end{pmatrix} = U_6 = A^6U_0 = \begin{pmatrix} 1\,882\,353 \\ 96 \end{pmatrix}$$

en arrondissant à l'unité. Le 1er juillet 2018, les nombres de campagnols et de renards estimés sont respectivement $1\,882\,353$ et 96.

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n = P\times D^n\times P^{-1}\times U_0$.

- $P\times D^0\times P^{-1}\times U_0 = P\times I_2\times P^{-1}\times U_0 = P\times P^{-1}\times U_0 = I_2\times U_0 = U_0$. La formule est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $U_n = P\times D^n\times P^{-1}\times U_0$. Alors,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= AU_n \\ &= P\times D\times P^{-1}\times P\times D^n\times P^{-1}\times U_0 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= P\times D\times I_2\times D^n\times P^{-1}\times U_0 = P\times D\times D^n\times P^{-1}\times U_0 \\ &= P\times D^{n+1}\times P^{-1}\times U_0 \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n = P\times D^n\times P^{-1}\times U_0$.

b) Pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7^n \end{pmatrix}$.

c) Puisque $0 < 0,7 < 1$, la suite $(0,7^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0. Mais alors, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes, de limites respectives

$$\ell_u = \frac{2,8\times 10^7 + 0}{15} = 1\,866\,667 \text{ arrondi à l'unité}$$

et

$$\ell_v = \frac{1\,400 + 0}{15} = 93 \text{ arrondi à l'unité.}$$

Donc, les populations de campagnols et de renards décroissent au cours du temps et au bout d'un grand nombre d'années, ces populations devraient se stabiliser autour de 1 866 667 et 93 respectivement.

Partie B - Un modèle plus conforme à la réalité

1) Dans la case B4, on doit écrire la formule

=1,1*B3-0,001*B3*C3

et dans la case C4, on doit écrire

=2*10∧(-7)*B3*C3+0,6*C3

2) A partir de l'année 2021 (=2012+9), la population de campagnols repart à la hausse.

Partie C

Pour alléger notations posons $u_0 = a$ et $v_0 = b$ où a et b sont deux réels strictement positifs.

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = u_0 \\ v_1 = v_0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1,1a - 0,001ab = a \\ 2 \times 10^{-7}ab + 0,6b = b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a(0,1 - 0,001b) = 0 \\ b(-2 \times 10^{-7}a + 0,4) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0,1 - 0,001b = 0 \\ -2 \times 10^{-7}a + 0,4 = 0 \end{array}\right. \text{ (car } a \neq 0 \text{ et } b \neq 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = \dfrac{0,1}{0,001} \\ a = \dfrac{0,4}{2} \times 10^7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = 100 \\ a = 2\ 000\ 000 \end{array}\right.$$

Ainsi, les populations de campagnols et de renards sont inchangées à l'année 1 si et seulement si $u_0 = 2\ 000\ 000$ et $v_0 = 100$. Mais alors, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\ 000\ 000$ et $v_n = 100$ ou encore les deux populations ne varient pas au cours du temps.

