Pondichéry 2018. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Quand $n = 4$, l'algorithme fournit $T_4 = 463$ arrondi à l'unité. La température du four au bout de 4 heures de refroidissement est donc de 463 degrés Celsius arrondi à l'unité.

2) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$.

- $980 \times 0,82^0 + 20 = 980 + 20 = 1\,000 = T_0$ (lu dans l'algorithme). L'égalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$.

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= 0,82T_n + 3,6 \text{ (lu dans l'algorithme)} \\
&= 0,82\left(980 \times 0,82^n + 20\right) + 3,6 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= 980 \times 0,82^{n+1} + 16,4 + 3,6 = 980 \times 0,82^{n+1} + 20.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$.

3) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
T_n \leqslant 70 &\Leftrightarrow 980 \times 0,82^n + 20 \leqslant 70 \Leftrightarrow 0,82^n \leqslant \frac{5}{98} \\
&\Leftrightarrow \ln\left(0,82^n\right) \leqslant \ln\left(\frac{5}{98}\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln(0,82) \leqslant \ln\left(\frac{5}{98}\right) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{5}{98}\right)}{\ln(0,82)} \text{ (car } \ln(0,82) < 0) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 14,9\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 15 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

Le four peut être ouvert sans risque pour les céramiques au bout de 15 heures.

Partie B

1) $f(0) = 1000 \Leftrightarrow ae^0 + b = 1\,000 \Leftrightarrow a + b = 1\,000 \Leftrightarrow b = 1 - a$. Donc, pour tout réel t,

$$f(t) = ae^{-\frac{t}{5}} + 1\,000 - a.$$

Ensuite, pour tout réel positif t, $f'(t) = a\left(-\frac{1}{5}\right)e^{-\frac{t}{5}} = -\frac{a}{5}e^{-\frac{t}{5}}$. Par suite,

$$-\frac{a}{5} = f'(0) = 4 - \frac{1}{5}f(0) = 4 - \frac{1}{5} \times 1\,000 = 4 - 200 = -196$$

puis $a = 5 \times 196 = 980$ et donc $b = 1\,000 - a = 20$. Ainsi,

$$\text{pour tout réel positif } t,\ f(t) = 980e^{-\frac{t}{5}} + 20.$$

2) a) $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{5}} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 980 \times 0 + 20 = 20$.

b) La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel positif t, $f'(t) = 980 \times \left(-\frac{1}{5}\right)e^{-\frac{t}{5}} = -196e^{-\frac{t}{5}}$. La fonction f' est strictement négative sur $[0,+\infty[$ et donc la fonction f strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

On en déduit le tableau de variations de f :

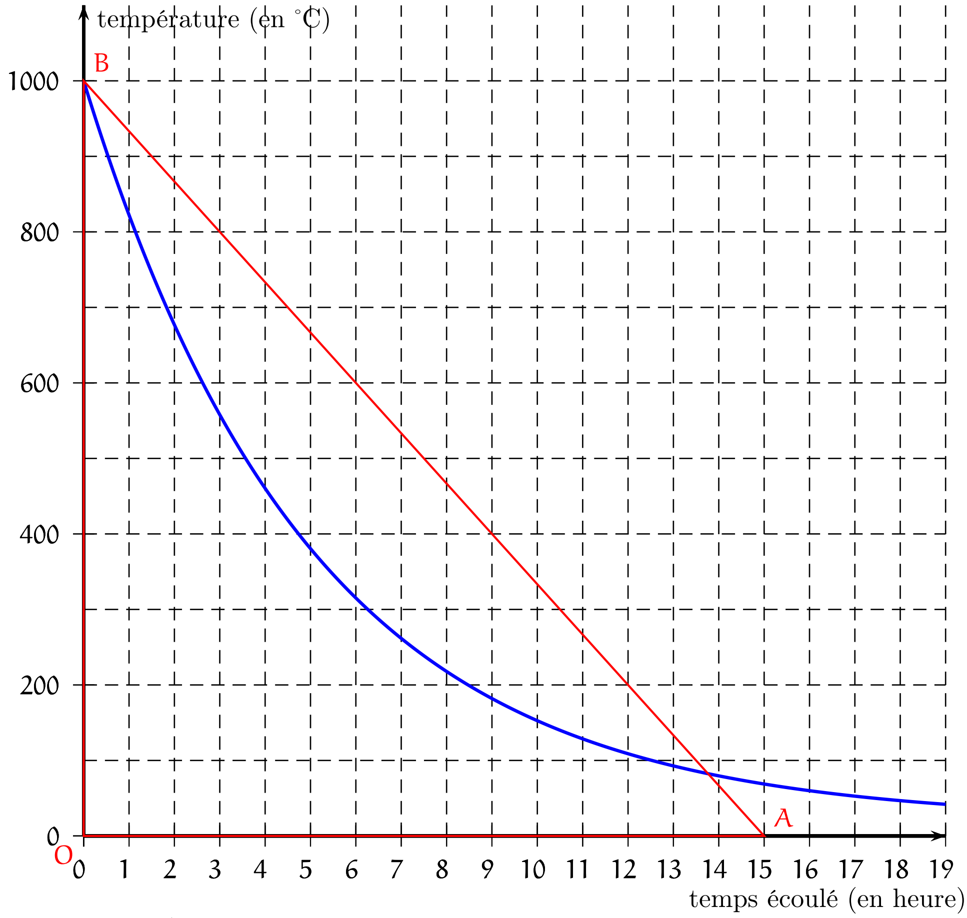
t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
f	$1\,000$ ↘	20

c) Soit t un réel positif.

$$f(t) \leqslant 70 \Leftrightarrow 980e^{-\frac{t}{5}} + 20 \leqslant 70 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{5}} \leqslant \frac{5}{98}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{t}{5} \leqslant \ln\left(\frac{5}{98}\right) \Leftrightarrow t \geqslant -5\ln\left(\frac{5}{98}\right),$$

avec $-5\ln\left(\frac{5}{98}\right) = 14,8\ldots$ On peut ouvrir le four sans risque au bout de $14,9$ heures.

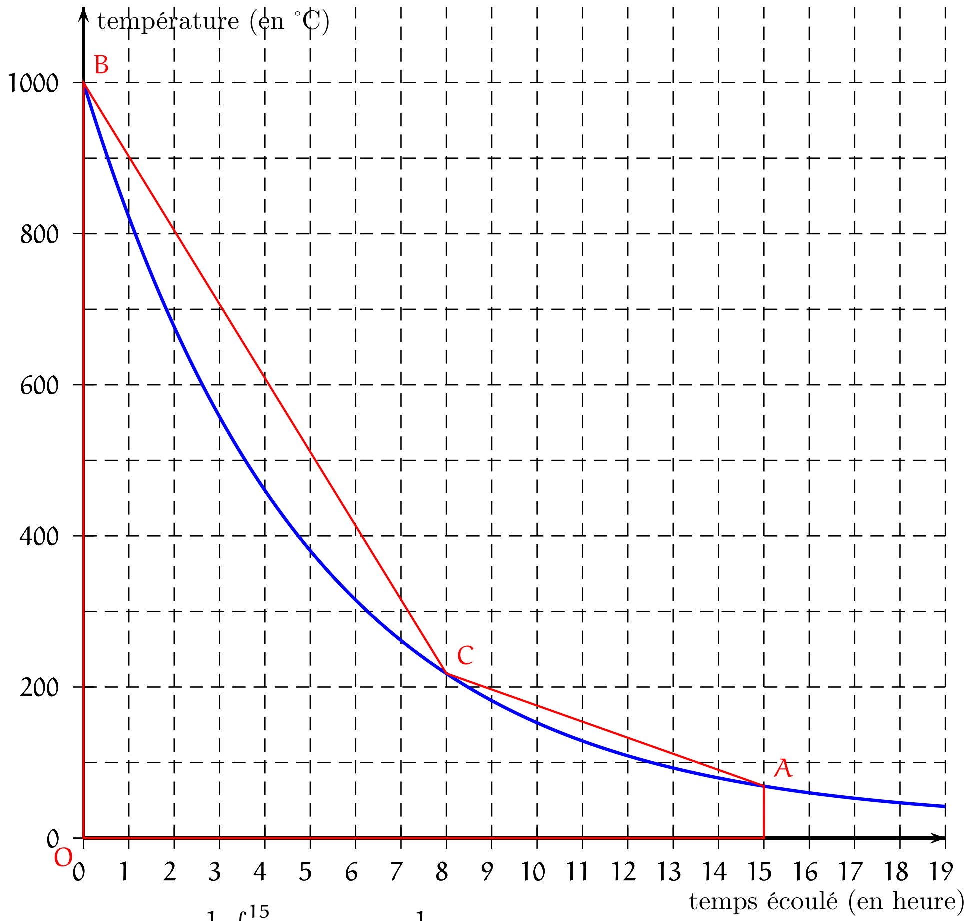
3) a) Le graphe de f est



Une estimation médiocre de $\int_0^{15} f(t)\ dt$ est aire de$(OAB) = \frac{15 \times 1000}{2}$. Une estimation médiocre de la température moyenne du four sur les 15 premières heures de refroidissement est

$$\theta = \frac{1}{15} \times \frac{15 \times 1000}{2} = 500°.$$

On peut affiner l'estimation avec la méthode des trapèzes :



Une meilleure estimation de $\theta = \dfrac{1}{15}\displaystyle\int_0^{15} f(t)\,dt$ est $\dfrac{1}{15}$ de l'aire du polygone OACB, soit environ

$$\frac{1}{15} \times \frac{8\times(1000+218)}{2} + \frac{7\times(218+69)}{2} \approx 390.$$

b)

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{1}{15-0}\int_0^{15} f(t)\,dt = \frac{1}{15-0}\int_0^{15}\left(980e^{-\frac{t}{5}}+20\right)dt \\
&= \frac{1}{15}\left[-5\times 980e^{-\frac{t}{5}}+20t\right]_0^{15} = \frac{1}{15}\left[-4\,900e^{-\frac{t}{5}}+20t\right]_0^{15} \\
&= \frac{1}{15}\left(\left(-4\,900e^{-3}+300\right)-\left(-4\,900e^{0}+0\right)\right) = \frac{5\,200-4\,900e^{-3}}{15} \\
&= 330^\circ \text{ arrondi à l'unité.}
\end{aligned}$$

4) a) Soit t un réel positif.

$$\begin{aligned}
d(t) = f(t)-f(t+1) &= \left(980e^{-\frac{t}{5}}+20\right)-\left(980e^{-\frac{t+1}{5}}+20\right) = 980e^{-\frac{t}{5}}-980e^{-\frac{t}{5}-\frac{1}{5}} \\
&= 980\left(e^{-\frac{t}{5}}-e^{-\frac{t}{5}}e^{-\frac{1}{5}}\right) = 980\left(1-e^{-\frac{1}{5}}\right)e^{-\frac{t}{5}}.
\end{aligned}$$

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{5}} = 0$ et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} d(t) = 0$. Ceci signifie qu'au bout d'un grand nombre d'heures de refroidissement, la température du four ne diminue presque plus.

EXERCICE 2

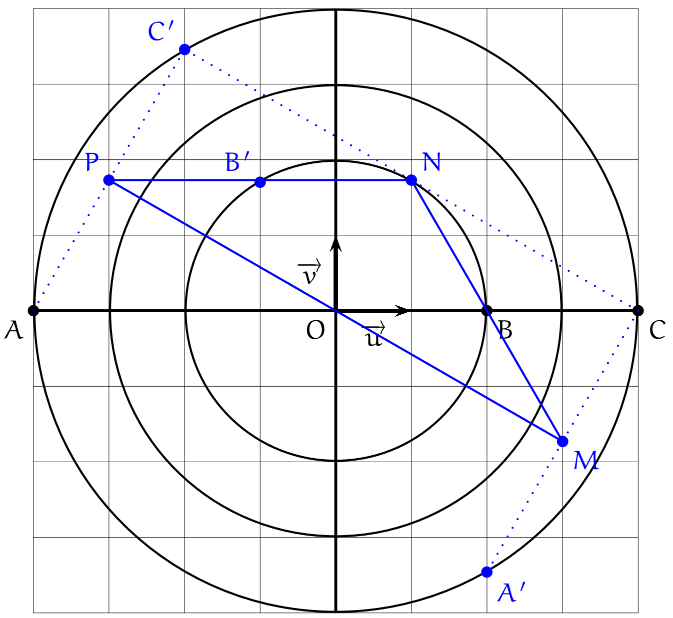
1) a) $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$a = -4$ puis $a' = -4\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 - 2i\sqrt{3}$. Mais aussi, $a = 4e^{i\pi}$ et donc $a' = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{i\pi} = 4e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

$b = 2$ puis $b' = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$. Mais aussi, $b = 2e^{0}$ et donc $b' = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{0} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$c = 4$ puis $c' = 4\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2i\sqrt{3}$. Mais aussi, $c = 4e^{0}$ et donc $c' = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{0} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b) Puisque $|j| = 1$, on a encore $|a'| = |a|$, $|b'| = |b|$ et $|c'| = |c|$. Mais alors, A' et C' sont sur le cercle de centre O et de rayon 4 et B' est sur le cercle de centre O et de rayon 2. Enfin, $x_{A'} = 2$ et $y_{A'} < 0$, $x_{B'} = -1$ et $y_{B'} > 0$, $x_{C'} = -2$ et $y_{C'} > 0$.



2) Les points A', B' et C' ont pour coordonnées respectives $\left(2, -2\sqrt{3}\right)$, $\left(-1, \sqrt{3}\right)$ et $\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$. Donc, les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ ont pour coordonnées respectives $\left(-3, 3\sqrt{3}\right)$ et $\left(-4, 4\sqrt{3}\right)$. On en déduit que $\overrightarrow{A'C'} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{A'B'}$.
Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ sont colinéaires et donc les points A', B' et C' sont alignés.

3) $z_M = \dfrac{z_{A'} + z_C}{2} = \dfrac{2 - 2i\sqrt{3} + 4}{2} = 3 - i\sqrt{3}$.
$z_N = \dfrac{z_{C'} + z_C}{2} = \dfrac{-2 + 2i\sqrt{3} + 4}{2} = 1 + i\sqrt{3}$.
$z_P = \dfrac{z_{C'} + z_A}{2} = \dfrac{-2 + 2i\sqrt{3} - 4}{2} = -3 + i\sqrt{3}$.
Ensuite,

$$NM = |z_M - z_N| = \left|\left(3 - i\sqrt{3}\right) - \left(1 + i\sqrt{3}\right)\right| = \left|2 - 2i\sqrt{3}\right| = \sqrt{2^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4,$$

et

$$NP = |z_P - z_N| = \left|\left(-3 + i\sqrt{3}\right) - \left(1 + i\sqrt{3}\right)\right| = |-4| = 4.$$

Puisque $NM = NP$, le triangle MNP est isocèle en N.

EXERCICE 3

Partie A

1) a) La calculatrice fournit $P(X_U < 0,2) = P(X_U \leqslant 0,2) = 0,032$ arrondi au millième et $P(0,5 \leqslant X_U < 0,8) = P(0,5 \leqslant X_U \leqslant 0,8) = 0,501$ arrondi au millième. (Pour $(X_U < 0,2)$, sur une TI, on a tapé normalcdf(0,0.2,0.58,0.21), mais on aurait tout aussi bien pu taper normalcdf(-10^{99},0.2,0.58,0.21) et on trouvait une probabilité égale à $0,035$ arrondi au millième).

b) La masse de sucre récupérée dans le récipient à fond étanche devrait être approximativement de $1\,800 \times 0,032 = 57,6$ g (si on prend $P(X_U < 0,2) = 0,035$, on trouve une masse égale à 63 g) que l'on arrondit à 60 g et la masse de sucre récupérée dans le tamis 2 devrait être approximativement de $1\,800 \times 0,501 = 901,8$ g que l'on arrondit à 900 g.

On récupère environ 60 g de sucre extra fin dans le récipient à fond étanche et 900 g de sucre dans le tamis 2.

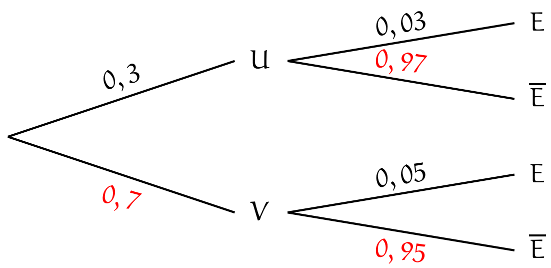
2) $P(0,5 \leqslant X_V < 0,8) = P(-0,15 \leqslant X_V - 0,65 < 0,15) = P\left(-\dfrac{0,15}{\sigma_V} \leqslant \dfrac{X_V - 0,65}{\sigma_V} < \dfrac{0,15}{\sigma_V}\right)$ où cette fois-ci la variable $\dfrac{X_V - 0,65}{\sigma_V}$ suit la loi normale centré réduite. L'énoncé donne $P\left(-\dfrac{0,15}{\sigma_V} \leqslant \dfrac{X_V - 0,65}{\sigma_V} < \dfrac{0,15}{\sigma_V}\right) = 0,4$ puis, pour des raisons de symétrie,

$$\begin{aligned}P\left(\frac{X_V - 0,65}{\sigma_V} \leqslant \frac{0,15}{\sigma_V}\right) &= P\left(-\frac{0,15}{\sigma_V} \leqslant \frac{X_V - 0,65}{\sigma_V} < \frac{0,15}{\sigma_V}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - P\left(-\frac{0,15}{\sigma_V} \leqslant \frac{X_V - 0,65}{\sigma_V} < \frac{0,15}{\sigma_V}\right)\right)\\ &= 0,4 + \frac{0,6}{2} = 0,7.\end{aligned}$$

La calculatrice donne $\dfrac{0,15}{\sigma_V} = 0,5244\ldots$ puis $\sigma_V = 0,286$ arrondi au millième.

Partie B

1) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



La probabilité demandée est $P(E)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(E) = P(U) \times P_U(E) + P(V) \times P_V(E) = 0,3 \times 0,03 + (1 - 0,3) \times 0,05 = 0,044.$$

La probabilité que le paquet prélevé porte le label « extra fin » est égale à $0,044$.

b) La probabilité demandée est $P_E(U)$.

$$P_E(U) = \frac{P(E \cap U)}{P(E)} = \frac{p(U) \times P_U(E)}{P(E)} = \frac{0,3 \times 0,03}{0,044} = 0,205 \text{ arrondi au millième.}$$

2) Posons $p = P(U)$.

$$P(E) = P(U) \times P_U(E) + P(V) \times P_V(E) = 0,03p + 0,05(1 - p) = 0,05 - 0,02p$$

puis

$$P_E(U) = \frac{p(U) \times P_U(E)}{P(E)} = \frac{0,03p}{0,05 - 0,02p}.$$

Mais alors,

$$\begin{aligned}P_E(U) = 0,3 &\Leftrightarrow \frac{0,03p}{0,05 - 0,02p} = 0,3 \Leftrightarrow 0,03p = 0,015 - 0,006p \Leftrightarrow 0,036p = 0,015\\ &\Leftrightarrow p = 0,417 \text{ arrondi au millième.}\end{aligned}$$

L'entreprise doit acheter $41,7\%$ de son sucre à l'exploitation U et donc $58,3\%$ du sucre à l'exploitation V.

Partie C

1) Ici, $n = 150$ et on fait l'hypothèse que $p = P(U) = 0,3$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 45 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 105 \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,3 - 1,96\sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{150}}; 0,3 + 1,96\sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{150}}\right] = [0,226; 0,374]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \frac{30}{150} = \frac{1}{5} = 0,2$. Cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation et donc, au risque de se tromper de 5%, l'acheteur a raison de remettre en question l'affirmation de l'entreprise.

2) $n = 150$ et $f = 0,42$. On a toujours $n \geqslant 30$, $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) \geqslant 5$. Un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95%, est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,42 - \frac{1}{\sqrt{150}}, 0,42 + \frac{1}{\sqrt{150}}\right] = [0,338; 0,502]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

EXERCICE 4.

Partie A : cryptage

1) La lettre N correspond au nombre $x = 13$. Ensuite,

$$x(x+B) = 13(13+13) = 338 = 10 \times 33 + 8.$$

Puis,$x(x+13) \equiv 8$ [33] avec $0 \leqslant 8 < 33$. Donc, la lettre N est codée par le nombre $y = 8$.

2) La lettre O correspond au nombre $x = 14$. Ensuite,

$$x(x+B) = 14(14+13) = 378 = 11 \times 33 + 15.$$

Puis,$x(x+13) \equiv 15$ [33] avec $0 \leqslant 15 < 33$. Donc, la lettre O est codée par le nombre $y = 15$.

Partie B : décryptage

1) $(x+23)^2 = x^2 + 46x + 23^2$. $46 \equiv 13$ [33] puis $23^2 = 529 = 16 \times 33 + 1$ $23^2 \equiv 1$ [33]. Par suite,

$$(x+23)^2 \equiv 4\ [33] \Leftrightarrow x^2 + 13x + 1 \equiv 4\ [33] \Leftrightarrow x(x+13) \equiv 3\ [33].$$

2) a) Si $(x+23)^2 \equiv 4$ [33] alors l'entier $(x+3)^3 - 4$ est un multiple de $33 = 3 \times 11$ et en particulier, $(x+3)^2 - 4$ est un multiple de 3 et de 11. On en déduit que $(x+3)^2 \equiv 4$ [3] et $(x+3)^2 \equiv 4$ [11].

b) Inversement, si $(x+23)^2 \equiv 4$ [3] est $(x+3)^2 \equiv 4$ [11], alors $(x+3)^2 - 4$ est divisible par les deux nombres premiers 3 et par 11. On en déduit que $(x+3)^3 - 4$ est divisible par $3 \times 11 = 33$ puis que $(x+3)^2 \equiv 4$ [33].

c) En résumé, $x(x+3) \equiv 3\ [33] \Leftrightarrow (x+23)^2 \equiv 4\ [33] \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(x+23)^2 \equiv 4\ [3]\\(x+23)^2 \equiv 4\ [11]\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(x+23)^2 \equiv 3\ [3]\\(x+23)^2 \equiv 4\ [11]\end{array}\right.$.

3) a) $0^2 \equiv 0$ [3], $1^2 \equiv 1$ [3] et $2^2 \equiv 1$ [3]. Donc, les entiers naturels a tels que $0 \leqslant a < 3$ et $a^2 \equiv 1$ [3] sont 1 et 2.

b) $0^2 \equiv 0$ [11], $1^2 \equiv 1$ [11], $2^2 \equiv 4$ [11], $3^2 \equiv 9$ [11], $4^2 \equiv 5$ [11], $5^2 = 3$ [11], $6^2 = 3$ [11] (car $6^2 \equiv (-5)^2$ [11]), $7^2 \equiv 5$ [11], $8^2 \equiv 9$ [11], $9^2 \equiv 4$ [11], $10^2 \equiv 1$ [11]. Donc, les entiers naturels b tels que $0 \leqslant b < 11$ et $b^2 \equiv 4$ [11] sont 2 et 9.

4) a) Ainsi,

$$\begin{aligned}
x(x+13) \equiv 3\ [33] &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(x+23)^2 \equiv 1\ [3]\\(x+23)^2 \equiv 4\ [11]\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x+23 \equiv 1\ [3] \text{ ou } x+23 \equiv 2\ [3]\\x+23 \equiv 2\ [11] \text{ ou } x+23 \equiv 9\ [11]\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x \equiv -22\ [3] \text{ ou } x \equiv -21\ [3]\\x \equiv -21\ [11] \text{ ou } x \equiv -14\ [11]\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x \equiv 2\ [3] \text{ ou } x \equiv 0\ [3]\\x \equiv 1\ [11] \text{ ou } x \equiv 8\ [11]\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x \equiv 2\ [3]\\x \equiv 1\ [11]\end{array}\right. \text{ ou } \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x \equiv 0\ [3]\\x \equiv 1\ [11]\end{array}\right. \text{ ou } \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x \equiv 2\ [3]\\x \equiv 8\ [11]\end{array}\right. \text{ ou } \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x \equiv 0\ [3]\\x \equiv 8\ [11]\end{array}\right.
\end{aligned}$$

b) Les nombres x tels que $0 \leqslant x < 33$ et $x \equiv 8$ [11] sont 8, 19, 30. Parmi ces nombres, seul 8 est congru à 2 modulo 3 et seul 30 est congru à 0 modulo 3.
Les nombres x tels que $0 \leqslant x < 33$ et $x \equiv 1$ [11] sont 1, 12, 23. Parmi ces nombres, seul 23 est congru à 2 modulo 3 et seul 12 est congru à 0 modulo 3.

En résumé, pour x entier tel que $0 \leqslant < 33$, $x(x+13) \equiv 3$ [33] si et seulement si x appartient à $\{8, 12, 23, 30\}$.

5) Algorithme complété.

```
Pour x allant de 0 à 32
  Si le reste de la division de x(x+3) par 33 est égal à 3 alors
    Afficher x
  Fin Si
Fin Pour
```

6) Il y a malheureusement trois entiers x tels que $0 \leqslant x < 26$ et $x(x+13) \equiv 3$ [33], à savoir 8, 12 et 23 correspondant aux lettres I, M et X. Alice ne peut donc pas connaître avec certitude la première lettre du message envoyé par Bob.

Le chiffre de RABIN est inutilisable pour décoder un message lettre à lettre (avec $n = 33$ et $B = 13$).

