Nouvelle Calédonie 2018. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

1) La calculatrice fournit $P(X \leqslant 81,2) = 0,301$ arrondi à 10^{-3} et $P(81,2 \leqslant X \leqslant 103,8) = 0,241$ arrondi à 10^{-3}. La bonne réponse est la réponse B.

2) $P(X > 52) = P(X - 50 > 2) = P\left(\dfrac{X-50}{2} > 1\right)$ où cette fois-ci la variable $N = \dfrac{X-50}{2}$ suit la loi normale centrée réduite. De plus, pour des raisons de symétrie,

$$2P(N > 1) = P(N > 1) + P(N < -1) = 1 - P(-1 \leqslant N \leqslant 1) = 1 - P(-1 < N < 1)$$

et donc,

$$P(X > 52) = P(N > 1) = \frac{1 - P(-1 < N < 1)}{2}.$$

La bonne réponse est la réponse C.

3) Soit λ le paramètre. On sait que pour tout réel t, $P(T \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. L'égalité $P(T > 2) = 0,5$ fournit $e^{-2\lambda} = \dfrac{1}{2}$ puis $-2\lambda = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln 2$ et donc $\lambda = \dfrac{1}{2}\ln 2$. De plus, la loi exponentielle est une loi sans vieillissement et donc

$$P_{(T>2)}(T > 5) = P_{(T>2)}(T > 2 + 3) = P(T > 3) = e^{-\frac{\ln 2}{2}\times 3} = 0,35 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

La bonne réponse est la réponse A.

4) On effectue 5 expériences identiques et indépendantes. Chaque expérience a deux issues : « la boule tirée est grise » avec une probabilité $p = \dfrac{3}{5+3} = \dfrac{3}{8}$ et « la boule tirée n'est pas grise » avec une probabilité $1 - p = \dfrac{5}{8}$. La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{3}{8}$.

On sait que $E(X) = np = \dfrac{15}{8} = 1,875$. D'autre part, $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\dfrac{5}{8}\right)^5 = 0,905$ à 10^{-3} près. La bonne réponse est la réponse C.

EXERCICE 2

1)

$$Z=\frac{1-i}{-8-8i\sqrt{3}}=-\frac{1}{8}\times\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}=-\frac{1}{8}\times\frac{(1-i)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}=-\frac{1}{8}\times\frac{1-i\sqrt{3}-i-\sqrt{3}}{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{8}\times\frac{\sqrt{3}-1+i\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}=\frac{\sqrt{3}-1}{32}+i\frac{\sqrt{3}+1}{32}$$

2) $|z_1|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ puis

$$z_1=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

De même, $|z_2|=\left|-8-8i\sqrt{3}\right|=|-8|\times\left|1+i\sqrt{3}\right|=8\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=16$ puis

$$z_2=16\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=16\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)=16e^{-i\frac{2\pi}{3}}.$$

3) $Z=\dfrac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{16e^{-i\frac{2\pi}{3}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times 8\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{1}{8\sqrt{2}}e^{i\frac{5\pi}{12}}$. Par suite,

$$Z=\frac{1}{8\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)=\frac{1}{8\sqrt{2}}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\frac{1}{8\sqrt{2}}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

4) Par identification des parties réelles, on en déduit que $\dfrac{1}{8\sqrt{2}}\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{32}$ puis que

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{8\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{32}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

5) Soit x un réel.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos x-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin x=-2\sqrt{3}&\Leftrightarrow\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\cos x-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\sin x=-\frac{2\sqrt{3}}{4}\\&\Leftrightarrow\cos x\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)-\sin x\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\&\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\\&\Leftrightarrow x+\frac{5\pi}{12}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ \text{ou}\ x+\frac{5\pi}{12}=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\&\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ \text{ou}\ x=-\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\&\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\ \text{ou}\ x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

EXERCICE 3

1) Soit n un entier naturel.

$$t_{n+1} = u_{n+1} - 5 = 2u_n - 5 - 5 = 2u_n - 10 = 2\left(u_n - 5\right) = 2t_n.$$

Donc, la suite $\left(t_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$. L'affirmation A est vraie.

De plus, $t_0 = u_0 - 5 = 9$ et donc, pour tout entier naturel n, $t_n = t_0 \times q^n = 9 \times 2^n$ puis $u_n = t_n + 5 = 9 \times 2^n + 5$. L'affirmation B est vraie.

2) Le membre de gauche de l'encadrement tend vers -1 quand n tend vers $+\infty$ et le membre de droite de cet encadrement tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Le théorème des gendarmes ne s'applique donc pas.

Considérons la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : pour tout entier naturel n, $v_n = (-1)^n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. La suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie l'encadrement de l'énoncé mais la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas une suite convergente.

L'affirmation C est fausse.

3) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}(8\times 1+3)+(8\times 2+3)+\ldots+(8\times n+3) &= 8(1+2+\ldots+n) + \underbrace{3+3+\ldots+3}_{n\ \text{termes}}\\ &= 8\times\frac{n(n+1)}{2} + 3n = 4n(n+1)+3n = n(4(n+1)+3)\\ &= n(4n+7)\end{aligned}$$

L'affirmation D est vraie.

4) L'affirmation E est fausse car une suite strictement positive n'est pas obligatoirement convergente. On peut néanmoins fournir l'exemple d'une suite strictement positive qui converge vers un réel qui n'est pas strictement positif. Soit $\left(w_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : pour tout entier naturel n, $w_n = \dfrac{1}{n+1}$. Tous les termes de la suite $\left(w_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement positifs mais la suite $\left(w_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel 0 qui n'est pas strictement positif.

EXERCICE 4.

Partie A

1) a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = -6x^2 + 2x = -2x(3x-1).$$

La fonction g' est strictement négative sur $]-\infty, 0[$ et sur $\left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$, strictement positive sur $\left]0, \frac{1}{3}\right[$ et s'annule en 0 et en $\frac{1}{3}$.

Donc, la fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$, strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

b) Pour tout réel non nul x, $g(x) = -2x^3\left(1 - \frac{x^2}{2x^3} + \frac{1}{2x^3}\right) = -2x^3\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^3}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^3} = 0$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^3}\right) = 1$. D'aure part, $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^3 = -\infty$. En multipliant on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^3}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3 = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

2) $g(0) = -1 < 0$ et $g\left(\frac{1}{3}\right) = -2\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{2}{27} + \frac{1}{9} - 1 = -\frac{26}{27} < 0$. Enfin, $g(-1) = -2(-1)^3 + (-1)^2 - 1 = 2 + 1 - 1 = 2 > 0$.

• La fonction g est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ puis strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$. Donc, pour tout x de $[0, +\infty[$, $g(x) \leqslant g\left(\frac{1}{3}\right)$ et en particulier $g(x) < 0$. La fonction g est donc strictement négative sur $[0, +\infty[$ et en particulier, l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $[0, +\infty[$.

• La fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ et de plus $g(-1) > 0$. Donc, la fonction g est strictement positive sur $]-\infty, -1]$ et en particulier, l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]-\infty, -1]$.

• La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[-1, 0]$ et de plus, $g(-1) > 0$ et $g(0) < 0$. D'après un corollaire au théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule une fois et une seule en un certain réel α de $[-1, 0]$.

En résumé, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$ et de plus, cette solution est dans $[-1, 0]$ et même dans $]-1, 0[$.

3) La fonction g est strictement décroissante sur $[-1, 0]$. Donc, si $-1 \leqslant x < \alpha$, alors $g(x) > g(\alpha)$ ou encore $g(x) > 0$ et si $\alpha < x \leqslant 0$, $g(x) < g(\alpha)$ ou encore $g(x) < 0$. En récupérant les résultats de la question précédente, on a montré que la fonction g est strictement positive sur $]-\infty, \alpha[$, strictement négative sur $]\alpha, +\infty[$ et s'annule en α.

Partie B

1) Pour tout réel $x < 0$, $x^3 + x^2 + x + 1 = x^3\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3 + x^2 + x + 1\right) = -\infty$.
D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x+1} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$.

En résumé, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3 + x^2 + x + 1\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x+1} = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2) a) Soit $x > 1$. En multipliant les deux membres de cette inégalité par le réel strictement positif x ou par le réel strictement positif x^2, on obtient $x < x^2$ et aussi $x^2 < x^3$. Ainsi, $1 < x < x^2 < x^3$.

b) Soit $x > 1$. Puisque $1 + x + x^2 + x^3 > 0$ et $e^{-2x+1} > 0$, on a encore $\left(1 + x + x^2 + x^3\right)e^{-2x+1} > 0$ et donc $f(x) > 0$. D'autre part, $1 + x + x^2 + x^3 < x^3 + x^3 + x^3 + x^3$ ou encore $1 + x + x^2 + x^3 < 4x^3$. En multipliant les deux membres de cette inégalité par le réel strictement positif e^{-2x+1}, on obtient $f(x) < 4x^3e^{-2x+1}$.

On a montré que pour tout réel $x > 1$, $0 < f(x) < 4x^3e^{-2x+1}$.

c) Soit x un réel. $4x^3e^{-2x+1} = \frac{1}{2} \times 8x^3 \times e^{-2x} \times e^1 = \frac{e}{2}(2x)^3e^{-2x}$. D'après le résultat admis par l'énoncé,

$$\lim_{x\to+\infty} 4x^3e^{-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e}{2}(2x)^3e^{-2x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{e}{2}X^3e^{-X} = \frac{e}{2}\times 0 = 0.$$

d) Les questions b) et c) et le théorème des gendarmes permettent d'affirmer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On en déduit que $\mathscr{C}_f$ admet l'axe des abscisses pour asymptote en $+\infty$.

3) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(3x^2+2x+1\right)e^{-2x+1} + \left(x^3+x^2+x+1\right)(-2)e^{-2x+1} = \left(3x^2+2x+1-2x^3-2x^2-2x-2\right)e^{-2x+1} \\ &= \left(-2x^3+x^2-1\right)e^{-2x+1} = g(x)e^{-2x+1}. \end{aligned}$$

4) Pour tout réel x, $e^{-2x+1} > 0$ et donc, pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. L'étude du signe de la fonction g a été effectuée à la question 3) de la partie A. On peut dresser le tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

