

Liban 2018. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

1) L'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$. Donc, en moyenne, le temps d'attente d'un étudiant, exprimé en secondes, est :

$$E(X) + E(Y) = \frac{1}{\lambda} + \mu = \frac{1}{0,02} + 96 = 50 + 96 = 146 \text{ s,}$$

ou aussi 2 min 26 s.

2) a) Puisque 2 minutes sont aussi 120 secondes, la probabilité demandée est $P(X \geq 120)$. Or, pour $t \geq 0$,

$$P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0,02t}.$$

Par suite,

$$P(X \geq 120) = 1 - P(X < 120) = 1 - P(X \leq 120) = 1 - (1 - e^{-0,02 \times 120}) = e^{-2,4} = 0,091 \text{ arrondi au millième.}$$

b) La probabilité demandée est $P(Y \leq 90)$. La calculatrice fournit $P(Y \leq 90) = 0,409$ arrondi au millième.

3) La loi exponentielle de paramètre λ est une loi sans vieillissement. Donc, $P_{X \geq 60}(X \leq 60 + 30) = P(X \leq 30)$. Une fois que l'on a attendu une minute, la probabilité d'attendre encore 30 secondes est la même que celle qu'on avait au départ. L'étudiante a eu tort de raccrocher car elle n'a pas augmenté ses chances mais elle a perdu le temps utilisé pour rappeler.

EXERCICE 2

1) $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ puis

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Ensuite, $1 - i = \overline{(1 + i)} = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$

2) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} S_n &= (1 + i)^n + (1 - i)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n + \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right) \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2 \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Si $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) > 0$, la forme trigonométrique de S_n est $2 \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) (\cos(0) + i \sin(0))$.

Si $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) < 0$, la forme trigonométrique de S_n est $-2 \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) (\cos(\pi) + i \sin(\pi))$.

Si $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0$, S_n n'admet pas de forme trigonométrique.

b) Pour tout entier naturel n , S_n est un nombre réel. Donc, l'affirmation A est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_n = 0 \Leftrightarrow 2 \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 0.$$

Si n est un entier naturel de la forme $2 + 4k$ où k est un entier naturel, alors

$$\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{(2 + 4k)\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$$

et donc $S_n = 0$. Ainsi, si n est l'un des entiers $2, 6, 10, 14, \dots$, S_n est nul. Donc, l'affirmation B est vraie.

EXERCICE 3

1) a) A l'instant 0, le sous-marin est en $S_1(0)$ où le point $S_1(0)$ a pour coordonnées $(140, 105, -170)$.

b) Le point $S_1(60)$ a pour coordonnées $(-3460, -5295, -1970)$. Puisque le premier sous-marin se déplace à vitesse constante en ligne droite, la distance, exprimée en mètres, parcourue par le premier sous-marin en une heure est $S_1(0)S_1(60)$.

$$\begin{aligned} S_1(0)S_1(60) &= \sqrt{(-3460 - 140)^2 + (-5295 - 105)^2 + (-1970 + 170)^2} = \sqrt{3600^2 + 5400^2 + 1800^2} \\ &= \sqrt{45\,360\,000} = 6\,734,98\dots \end{aligned}$$

En une heure, le premier sous-marin parcourt 6,7 km arrondi au dixième de kilomètre ou encore la vitesse du premier sous-marin est 6,7 km/h arrondi au dixième de kilomètre par heure.

c) Le point $S_1(1)$ a pour coordonnées $(80, 15, -200)$. Le vecteur $\overrightarrow{S_1(0)S_1(1)}$ a pour coordonnées $(-60, -90, -30)$. L'angle α est l'angle non orienté entre le vecteur $\vec{u} = -\frac{1}{30}\overrightarrow{S_1(0)S_1(1)}$ de coordonnées $(2, 3, 1)$ et le vecteur \vec{v} de coordonnées $(2, 3, 0)$.

$$\bullet \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 2 + 3 \times 3 + 1 \times 0 = 13.$$

$$\bullet \|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14} \text{ et } \|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{13}.$$

Donc,

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{13}{\sqrt{14} \times \sqrt{13}} = \sqrt{\frac{13}{14}}.$$

La calculatrice fournit alors $\alpha = 15,5^\circ$ à dixième de degré près.

2) Le point $S_2(t)$ se déplace sur une droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 68 + at \\ y = 135 + bt \\ z = -68 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

(on a donc pris pour paramètre le temps t) où a , b et c sont trois réels non tous nuls à déterminer. La condition « $S_2(3)$

a pour coordonnées $(-202, -405, -248)$ » fournit $\begin{cases} -202 = 68 + 3a \\ -405 = 135 + 3b \\ -248 = -68 + 3c \end{cases}$ et donc $a = -90$, $b = -180$ et $c = -60$. Ainsi,

le point $S_2(t)$ a pour coordonnées à l'instant t : $\begin{cases} x(t) = 68 - 90t \\ y(t) = 135 - 180t \\ z(t) = -68 - 60t \end{cases}$.

Les deux sous-marins sont à la même profondeur si et seulement si $-170 - 30t = -68 - 60t$ ce qui équivaut à $t = \frac{102}{30} = 3,4$. Les deux sous-marins sont à la même profondeur à l'instant $t = 3,4$ min.

On peut noter que quand $t = 3,4$ l'abscisse du point $S_1(t)$ est $140 - 60 \times 3,4 = -64$ et l'abscisse du point $S_2(t)$ est $68 - 90 \times 3,4 = -238$. Donc, il n'y a pas de collision entre les deux sous-marins.

EXERCICE 4.

1) Soit n un entier naturel non nul. Puisque pour tout x de $[1, 5]$, $x^n \neq 0$, la fonction f_n est dérivable sur $[1, 5]$ et pour $x \in [1, 5]$

$$f'_n(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^n - \ln x \times nx^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{x^{n-1} - nx^{n-1} \ln x}{x^{2n}} = \frac{x^{n-1} (1 - n \ln x)}{x^{2n}} = \frac{1 - n \ln x}{x^{2n-(n-1)}} = \frac{1 - n \ln x}{x^{n+1}}.$$

2) Soit n un entier naturel non nul. Notons (x_n, y_n) , avec $y_n = f_n(x_n)$, les coordonnées du point A_n . En admettant que $x_n \in]1, 5[$, on a nécessairement $f'_n(x_n) = 0$. Or,

$$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - n \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{n} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{n}}.$$

Donc, $x_n = e^{\frac{1}{n}}$ puis

$$y_n = f_n(x_n) = \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{n}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n} = \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{n}}\right)}{e} = \frac{1}{e} \ln(x_n).$$

Donc, le point A_n appartient à la courbe d'équation $y = \frac{1}{e} \ln(x)$.

3) a) Soit $x \in [1, 5]$. La fonction \ln est croissante sur l'intervalle $[1, 5]$ et donc $\ln(1) \leq \ln(x) \leq \ln(5)$ ou encore $0 \leq \ln(x) \leq \ln(5)$. En divisant les trois membres de cet encadrement par le réel strictement positif x^n , on obtient

$$\text{pour tout } x \text{ de } [1, 5], 0 \leq \frac{\ln(x)}{x^n} \leq \frac{\ln(5)}{5^n}.$$

b) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} \int_1^5 \frac{1}{x^n} dx &= \int_1^5 x^{-n} dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1} \right]_1^5 = \left[-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \right]_1^5 = -\frac{1}{(n-1)5^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \\ &= \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right). \end{aligned}$$

c) Soit n un entier naturel non nul. Puisque la fonction f_n est continue et positive sur $[1, 5]$, l'aire \mathcal{A}_n considérée est

$$\mathcal{A}_n = \int_1^5 f_n(x) dx = \int_1^5 \frac{\ln x}{x^n} dx.$$

D'après la question 3)a) et par positivité et croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \mathcal{A}_n \leq \int_1^5 \frac{\ln x}{x^n} dx = \ln 5 \int_1^5 \frac{1}{x^n} dx = \frac{\ln 5}{n-1} \left(1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right).$$

Puisque $-1 < \frac{1}{5} < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5^{n-1}} = 0$. D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 5}{n-1} = 0$. Donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 5}{n-1} \left(1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right) = 0 \times (1 - 0) = 0.$$

Mais alors, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = 0$.

EXERCICE 5.

1) Algorithme complété.

```

1  A ← 0
2  B ← 1
3  Pour i allant de 2 à n :
4  |   C ← A + B
5  |   A ← B
6  |   B ← C
7  Fin Pour
    
```

$$2) A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

3) a) Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

$$\begin{aligned} A^p \times A^q &= \begin{pmatrix} a_{p+1} & a_p \\ a_p & a_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{q+1} & a_q \\ a_q & a_{q-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{p+1}a_{q+1} + a_p a_q & a_{p+1}a_q + a_p a_{q-1} \\ a_p a_{q+1} + a_{p-1} a_q & a_p a_q + a_{p-1} a_{q-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mais on a aussi

$$A^p \times A^q = A^{p+q} = \begin{pmatrix} a_{p+q+1} & a_{p+q} \\ a_{p+q} & a_{p+q-1} \end{pmatrix}.$$

On en déduit en égalant les coefficients ligne 2, colonne 1, que

$$a_{p+q} = a_p a_{q+1} + a_{p-1} a_q.$$

b) Si r est un entier naturel divisant a_p et a_p , r divise $a_p a_{q+1}$ et $a_{p-1} a_q$ puis r divise $a_p a_{q+1} + a_{p-1} a_q$ et finalement r divise a_{p+q} .

c) Soit p un entier naturel non nul. Puisque $p \geq 1$, $a_p \neq 0$. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , a_p divise a_{np} .

- $a_{0 \times p} = a_0 = 0$ et donc a_p divise $a_{0 \times p}$. L'affirmation à démontrer est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que a_p divise a_{np} . Donc, a_p divise a_{np} et d'autre part, a_p divise a_p . D'après la question précédente, a_p divise $a_{np+p} = a_{(n+1)p}$.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n , a_p divise a_{np} .

4) a) La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est clairement positive et même strictement positive à partir du rang 1. Soit alors $n \geq 2$. $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} > a_n$ car $n-1 \geq 1$ et donc $a_{n-1} > 0$. Donc, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir du rang 2.

Soit $n \geq 5$. Supposons n non premier. Donc, $n \geq 6$ et il existe deux entiers naturels p et q tels que $2 \leq p < n$, $2 \leq q < n$ et $n = p \times q$. Puisque $n \geq 6$, il n'est pas possible que $p = q = 2$. L'un des deux entiers p ou q au moins est supérieur ou égal à 3. Supposons par exemple que ce soit l'entier p .

Alors, $a_p \geq a_3 = 2$ mais aussi, puisque $p < n$ puis $a_p < a_n$ (puisque la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir du rang 2). D'autre part, a_p divise $a_{pq} = a_n$ d'après la question précédente. Ainsi, a_n admet dans \mathbb{N}^* , un diviseur, à savoir a_p , qui n'est ni 1, ni n . Donc, a_n n'est pas premier.

b) La propriété du a) peut aussi s'écrire « si $n \geq 5$ et a_n est premier, alors n est premier ». La propriété réciproque à étudier est donc « si n est un nombre premier supérieur ou égal à 5, alors a_n est un nombre premier ».

19 est un nombre premier car 19 n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à sa racine carrée, à savoir 2 et 3.

D'après le résultat admis par l'énoncé, a_{19} n'est pas premier. Donc, la réciproque du résultat de la question 4.a) est fausse.