

Asie 2018. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

1) a) $f_p(0) = \frac{100p}{1 - (1-p)e^0} = \frac{100p}{1 - (1-p)} \frac{100p}{p} = 100.$

b) Soit $t \geq 0$. Puisque $p > 0$, $-pt \leq 0$ puis $e^{-pt} \leq 1$. En multipliant les deux membres de cette inégalité par le réel strictement positif $1-p$, on en déduit que $(1-p)e^{-pt} \leq 1-p$ puis que $p \leq 1 - (1-p)e^{-pt}$ ou encore $1 - (1-p)e^{-pt} \geq p$.

c) Soit $t \geq 0$. $1 - (1-p)e^{-pt} \geq p > 0$. En prenant l'inverse, on obtient $\frac{1}{1 - (1-p)e^{-pt}} \leq \frac{1}{p}$. En multipliant les deux membres de cet encadrement par le réel strictement positif $100p$, on obtient $\frac{100p}{1 - (1-p)e^{-pt}} \leq \frac{100p}{p}$ ou encore $f_p(t) \leq 100$.

D'autre part, $100p > 0$ et $1 - (1-p)e^{-pt} > 0$ et donc $f_p(t) > 0$.

Finalement, pour tout réel $t \geq 0$, $0 < f_p(t) \leq 100$.

2) a) La fonction $f_{0,9}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$ (à savoir la fonction $t \mapsto \frac{1 - 0,1e^{-0,9t}}{90}$) et ne s'annulant pas sur $[0, +\infty[$. De plus, pour $t \geq 0$,

$$f'_{0,9}(t) = 90 \times \frac{-(1 - 0,1e^{-0,9t})'}{(1 - 0,1e^{-0,9t})^2} = -90 \frac{(-0,1)(-0,9)e^{-0,9t}}{(1 - 0,1e^{-0,9t})^2} = -\frac{8,1e^{-0,9t}}{(1 - 0,1e^{-0,9t})^2}.$$

La fonction $f'_{0,9}$ est donc strictement négative sur $[0, +\infty[$ puis la fonction $f_{0,9}$ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

b) Pour tout réel $t \geq 0$, $0 < 1 - 0,1e^{-0,9t} \leq 1$ puis $\frac{90}{1 - 0,1e^{-0,9t}} \geq \frac{90}{1}$ et finalement $f_{0,9}(t) \geq 90$.

c) Le résultat de la question 2.a signifie que, au cours du temps, la population de crevettes va en diminuant. Le résultat de la question 2.b signifie que la population de crevettes ne descendra jamais en dessous de 90 tonnes.

3) Puisque $p > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_p(t) = \frac{100p}{1 - (1-p) \times 0} = 100p$.

4) a) La fonction H est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour $t \geq 0$,

$$H'(t) = 100 \times \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{t}{2}}}{2 - e^{-\frac{t}{2}}} + 50 = \frac{50e^{-\frac{t}{2}}}{2 - e^{-\frac{t}{2}}} + 50 = \frac{50e^{-\frac{t}{2}} + 100 - 50e^{-\frac{t}{2}}}{2 - e^{-\frac{t}{2}}} = \frac{100}{2 - e^{-\frac{t}{2}}}$$

et d'autre part, en multipliant numérateur et dénominateur par $\frac{1}{2}$, on obtient

$$f_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{100 \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}} = \frac{100}{2 - e^{-\frac{t}{2}}} = H'(t).$$

Donc, la fonction H est une primitive de la fonction $f_{\frac{1}{2}}$ sur $[0, +\infty[$.

b) La masse moyenne cherchée, exprimée en tonnes, est $\frac{1}{5-0} \int_0^5 f_{\frac{1}{2}}(t) dt$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{5-0} \int_0^5 f_{\frac{1}{2}}(t) dt &= \frac{1}{5} [H(t)]_0^5 = \frac{1}{5} ((100 \ln(2 - e^{-2,5}) + 250) - (100 \ln(2 - e^0) + 0)) \\ &= 20 \ln(2 - e^{-2,5}) + 50. \end{aligned}$$

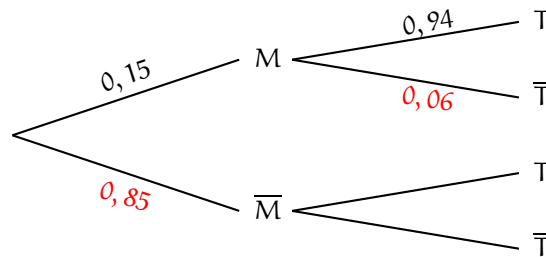
La masse moyenne cherchée, exprimée en tonnes, est de 63 tonnes, arrondi à la tonne.

EXERCICE 2

Partie A

1) Notons M l'événement « l'individu est malade » et T l'événement « l'individu a un test positif ». L'énoncé donne $P(M) = 0,15$, $P_M(T) = 0,94$ et $P(T) = 0,158$.

Représentons la situation par un arbre de probabilités.



La probabilité demandée est $P_T(M)$.

$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{P(M) \times P_M(T)}{P(T)} = \frac{0,15 \times 0,94}{0,158} = 0,89 \text{ arrondi au centième.}$$

La bonne réponse est la réponse C.

2) Notons n la taille de l'échantillon puis X la variable aléatoire égale au nombre de personnes de cet échantillon ayant un test positif.

n expériences identiques et indépendantes sont effectuées (tester chacune des n personnes de l'échantillon). Chaque expérience a deux issues à savoir « la personne a un test positif » avec une probabilité $p = 0,158$ et « la personne a un test négatif » avec une probabilité $1 - p = 0,842$. La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,158$.

La probabilité qu'au moins une personne ait un test positif est $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0,842)^n$. Mais alors,

$$\begin{aligned} p(X \geq 1) \geq 0,99 &\Leftrightarrow 1 - (0,842)^n \geq 0,99 \Leftrightarrow (0,842)^n \leq 0,01 \\ &\Leftrightarrow \ln(0,842)^n \leq \ln(0,01) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow n \ln(0,842) \leq \ln(0,01) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,842)} \text{ (car } \ln(0,842) < 0) \\ &\Leftrightarrow n \geq 26,7 \dots \\ &\Leftrightarrow n \geq 27 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse B.

3) Notons X la variable aléatoire égale au volume d'une dose.

$$P(1,99 \leq X \leq 2,01) = P(-0,01 \leq X - 2 \leq 0,01) = P\left(-\frac{0,01}{\sigma} \leq \frac{X-2}{\sigma} \leq \frac{0,01}{\sigma}\right)$$

où cette fois-ci la variable $Z = \frac{X-2}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite. L'énoncé donne $P\left(-\frac{0,01}{\sigma} \leq Z \leq \frac{0,01}{\sigma}\right) = 0,997$.

Pour des raisons de symétrie, $P\left(Z \leq -\frac{0,01}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - P\left(-\frac{0,01}{\sigma} \leq \frac{X-2}{\sigma} \leq \frac{0,01}{\sigma}\right)\right)$ et donc

$$\begin{aligned} P\left(Z \leq \frac{0,01}{\sigma}\right) &= P\left(Z \leq -\frac{0,01}{\sigma}\right) + P\left(-\frac{0,01}{\sigma} \leq \frac{X-2}{\sigma} \leq \frac{0,01}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - P\left(-\frac{0,01}{\sigma} \leq \frac{X-2}{\sigma} \leq \frac{0,01}{\sigma}\right)\right) + P\left(-\frac{0,01}{\sigma} \leq \frac{X-2}{\sigma} \leq \frac{0,01}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} P\left(-\frac{0,01}{\sigma} \leq \frac{X-2}{\sigma} \leq \frac{0,01}{\sigma}\right) = 0,5 + \frac{0,997}{2} = 0,9985. \end{aligned}$$

La calculatrice fournit $\frac{0,01}{\sigma} = 2,9677 \dots$ puis $\sigma = 0,0033 \dots$. La bonne réponse est la réponse C.

Partie B

1) Notons X la variable aléatoire égale à la durée d'efficacité à partir du douzième mois. Pour $t \geq 0$,

$$P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = (-e^{-\lambda t}) - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda t}$$

et donc aussi $P(X \geq t) = P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$.

L'énoncé donne $P(X \geq 6) = 0,887$ et donc $e^{-6\lambda} = 0,887$ puis $\lambda = -\frac{\ln(0,887)}{6}$. Mais alors, la durée d'efficacité moyenne, exprimée en mois, à partir du douzième mois qui est aussi l'espérance de X , est $\frac{1}{\lambda} = -\frac{6}{\ln(0,887)} = 50$ mois, arrondi au mois.

La durée totale moyenne d'efficacité est donc $12 + 50 = 62$ mois arrondi au mois.

2) Soit Y le nombre de personnes malades dans la population. Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 100\,000$ et $p = 0,15$. Puisque n est grand, on approche cette loi binomiale par la loi normale de paramètres $\mu = np = 15\,000$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{12\,750} = 113$ arrondi à l'unité. Soit $Z = \frac{Y - 15\,000}{113}$. Z suit la loi normale centrée réduite.

Soit k la taille du stock de médicaments. On veut la valeur minimale de k pour laquelle $P(Y \leq k) \geq 0,95$. Or, pour $k_0 \in \mathbb{R}$,

$$P(Y \leq k_0) = 0,95 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{k_0 - 15\,000}{113}\right) = 0,95.$$

La calculatrice donne $\frac{k_0 - 15\,000}{113} = 1,64485\dots$ puis $k_0 = 15\,186$ arrondi à l'unité. Maintenant, pour $k < k_0$, $P(Y \leq k) < P(Y \leq k_0) = 0,95$ et pour $k \geq k_0$, $P(Y \leq k) \geq P(Y \leq k_0) = 0,95$.

Le stock de médicaments doit être constitué d'au moins 15 186 boîtes de médicaments.

EXERCICE 3

$$1) AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(3 - (-3))^2 + (0 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = 6.$$

$$AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 + (z_D - z_A)^2} = \sqrt{(0 - (-3))^2 + (\sqrt{3} - 0)^2 + (2\sqrt{6} - 0)^2} = \sqrt{9 + 3 + 24} = \sqrt{36} = 6.$$

Donc, $AB = AD = 6$.

2) a) Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{3+0}{2}, \frac{0+3\sqrt{3}}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$ ou encore $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$. Le point H (et donc aussi le vecteur \overrightarrow{OH}) a pour coordonnées $\left(\frac{0+0}{2}, \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}, \frac{0+2\sqrt{6}}{2}\right)$ ou encore $(0, 2\sqrt{3}, \sqrt{6})$.

Le plan \mathcal{P} est le plan passant par le point I $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{OH}(0, 2\sqrt{3}, \sqrt{6})$. Une équation cartésienne du plan \mathcal{P} est $0 \times \left(x - \frac{3}{2}\right) + 2\sqrt{3} \times \left(y - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{6} \times (z - 0) = 0$ ou encore $2y\sqrt{3} + z\sqrt{6} - 9 = 0$.

b) Le point J a pour coordonnées $\left(\frac{3+0}{2}, \frac{0+\sqrt{3}}{2}, \frac{0+2\sqrt{6}}{2}\right)$ ou encore $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{6}\right)$.

$$2y_J\sqrt{3} + z_J\sqrt{6} - 9 = 2 \times \frac{3}{2} + \sqrt{6} \times \sqrt{6} - 9 = 3 + 6 - 9 = 0. \text{ Donc, le point J appartient au plan } \mathcal{P}.$$

Le vecteur \overrightarrow{BD} a pour coordonnées $(-3, \sqrt{3}, 2\sqrt{6})$.

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{OH} = (-3) \times 0 + \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} \times \sqrt{6} = 18 \neq 0.$$

Donc, la droite (BD) n'est pas parallèle au plan \mathcal{P} et par suite, la droite (BD) est sécante au plan \mathcal{P} en un point. Puisque le point J appartient à la fois au plan \mathcal{P} et à la droite (BD), le point J est le point d'intersection de la droite (BD) et du plan \mathcal{P} .

c) La droite (AD) est la droite passant par le point A $(-3, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AD}(3, \sqrt{3}, 2\sqrt{6})$. Une représentation paramétrique de la droite (AD) est donc

$$\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = t\sqrt{3} \\ z = 2t\sqrt{6} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Soit M $(-3 + 3t, t\sqrt{3}, 2t\sqrt{6})$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (AD).

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}(t\sqrt{3}) + \sqrt{6}(2t\sqrt{6}) - 9 = 0 \Leftrightarrow 18t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Pour $t = \frac{1}{2}$, on obtient les coordonnées du point K : $\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{6}\right)$. On note que le point K est le milieu du segment [AD].

d) Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ et le point J a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{6}\right)$. Donc, le vecteur \overrightarrow{IJ} a pour coordonnées $(0, -\sqrt{3}, \sqrt{6})$.

Le point K a pour coordonnées $\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{6}\right)$ et donc le vecteur \overrightarrow{JK} a pour coordonnées $(-3, 0, 0)$.

$$\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{JK} = 0 \times (-3) + (-\sqrt{3}) \times 0 + \sqrt{6} \times 0 = 0.$$

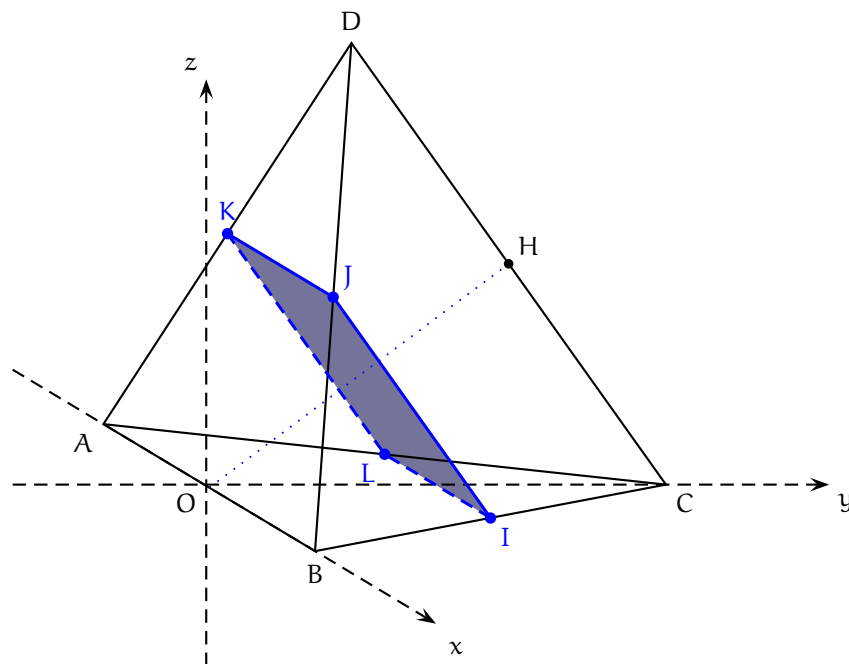
Donc, les droites (IJ) et (JK) sont orthogonales. De plus, les droites (IJ) et (JK) ont le point J en commun et donc les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires.

e) Puisque le tétraèdre est régulier, par symétrie des rôles des points A, B, C et D, le plan \mathcal{P} coupe la droite (AC) en le milieu L du segment [AC]. La section du tétraèdre ABCD par le plan \mathcal{P} est le quadrilatère IJKL.

Dans le triangle ABD, la droite des milieux (JK) est parallèle à la droite (AB) et dans le triangle ABC, la droite des milieux (IL) est parallèle à la droite (AB). Donc, la droite (JK) est parallèle à la droite (IL). De même, la droite (IJ) est parallèle à la droite (KL). Donc, le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.

$IJ = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB = JK$ et donc le parallélogramme $IJKL$ est un losange. $(IJ) \perp (JK)$ d'après la question d et donc le quadrilatère $IJKL$ est un rectangle.

Finalement, la section du tétraèdre par le plan \mathcal{P} est le carré $IJKL$.



3) Par symétrie des rôles des points A, B, C et D , les droites (JO) et (JI) sont perpendiculaires (d'après la question 2.d) ou encore le point $M = J$ est un point de la droite (BD) tel que le triangle OMI soit rectangle en M .

EXERCICE 4.

1) $OA = |z_A| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $OB = |z_B| = \sqrt{x^2 + 1}$ et $OC = |z_C| = \sqrt{y^2 + 1}$ puis

$$OC = OA \times OB \Rightarrow \sqrt{y^2 + 1} = \sqrt{2}\sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y^2 + 1 = 2(x^2 + 1) \Rightarrow y^2 = 2x^2 + 1.$$

2) **Algorithme complété.**

```

Pour x allant de 1 à 10 faire
  Pour y allant de 1 à 10 faire
    Si  $y^2 = 2x^2 + 1$ 
      Afficher x et y
    Fin Si
  Fin Pour
Fin Pour
    
```

3) a) $|z_A| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ puis

$$z_A = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

z_A est le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{4}$.

b) $OB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ et $OC = |z_C| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. Par suite,

$$OA \times OB = \sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10} = OC.$$

c) $z_{BZC} = (2 + i)(3 + i) = 6 + 2i + 3i - 1 = 5 + 5i = 5(1 + i) = 5z_A$. Par suite,

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OC}) &= \arg(z_B) + \arg(z_C) \quad [2\pi] \\ &= \arg(z_B z_C) \quad [2\pi] \\ &= \arg(5z_A) \quad [2\pi] \\ &= \arg(5) + \arg(z_A) \quad [2\pi] \\ &= \arg(z_A) \quad [2\pi] \\ &= (\vec{u}, \overrightarrow{OA}). \end{aligned}$$

4) a)

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OC}) - (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) &= \arg(z_B) + \arg(z_C) - \arg(z_A) \quad [2\pi] \\ &= \arg\left(\frac{z_B \times z_C}{z_A}\right) \quad [2\pi] \\ &= \arg\left[\frac{(x+i)(y+i)}{1+i}\right] \quad [2\pi], \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OC}) - (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) &= 0 \quad [2\pi] \\ \Leftrightarrow \arg\left[\frac{(x+i)(y+i)}{1+i}\right] &= 0 \quad [2\pi]. \end{aligned}$$

Cette dernière condition signifie que le nombre complexe $\frac{(x+i)(y+i)}{1+i}$ est un réel strictement positif et en particulier, la partie imaginaire du nombre complexe $\frac{(x+i)(y+i)}{1+i}$ est nulle. Or,

$$\begin{aligned} \frac{(x+i)(y+i)}{1+i} &= \frac{(xy + ix + iy - 1)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{[(xy-1) + i(x+y)](1-i)}{1^2 + 1^2} = \frac{(xy-1) - i(xy-1) + i(x+y) + (x+y)}{2} \\ &= \frac{xy + x + y - 1}{2} + i \frac{-xy + 1 + x + y}{2}. \end{aligned}$$

Mais alors, $\frac{-xy + 1 + x + y}{2} = 0$ puis $x + y - xy + 1 = 0$.

b) Si $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$, alors $y^2 = 2x^2 + 1$ d'après la question 1 puis $y = \sqrt{2x^2 + 1}$ car y est un réel positif.

Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA})$, alors $x + y - xy + 1 = 0$ d'après la question précédente. Si de plus $x \neq 1$, alors

$$x + y - xy + 1 = 0 \Rightarrow y(1 - x) = -x - 1 \Rightarrow y = \frac{-x - 1}{-x + 1} \Rightarrow y = \frac{x + 1}{x - 1}.$$

5) Si $x = 1$ alors $A = B$. Ceci entraîne le fait que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OC}) = 0 [2\pi]$ puis le fait que C est sur l'axe (O, \overrightarrow{u}) ou encore le fait que z_C est réel. Ceci est faux car la partie imaginaire de C est non nulle. Donc, $x = 1$ ne fournit pas de couple (x, y) solution.

Sinon, x est un réel strictement supérieur à 1 et on doit avoir $f(x) = y = g(x)$. x est donc une solution sur $]1, +\infty[$ de l'équation $f(x) = g(x)$.

Pour $x > 1$, posons $h(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{2x^2 + 1} - \frac{x + 1}{x - 1}$. La fonction h est dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour $x > 1$,

$$h'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}} - \left(-\frac{2}{(x - 1)^2} \right) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}} + \frac{2}{(x - 1)^2}.$$

La fonction h' est strictement positive sur $]1, +\infty[$ et donc la fonction h est strictement croissante sur $]1, +\infty[$. Par suite, l'équation $h(x) = 0$ admet dans $]1, +\infty[$ au plus une solution puis il existe au plus une valeur de x fournissant une solution au problème posé et finalement, le problème posé au plus une solution (x, y) car y est nécessairement égal à $\sqrt{2x^2 + 1}$.

Réciproquement, le couple $(x, y) = (2, 3)$ est une solution au problème posé d'après la question 3). Donc, le problème posé admet une solution et une seule à savoir le couple $(x, y) = (2, 3)$.