Asie 2018. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

1) a) $f_p(0) = \dfrac{100p}{1-(1-p)e^0} = \dfrac{100p}{1-(1-p)}\dfrac{100p}{p} = 100.$

b) Soit $t \geqslant 0$. Puisque $p > 0$, $-pt \leqslant 0$ puis $e^{-pt} \leqslant 1$. En multipliant les deux membres de cette inégalité par le réel strictement positif $1-p$, on en déduit que $(1-p)e^{-pt} \leqslant 1-p$ puis que $p \leqslant 1-(1-p)e^{-pt}$ ou encore $1-(1-p)e^{-pt} \geqslant p$.

c) Soit $t \geqslant 0$. $1-(1-p)e^{-pt} \geqslant p > 0$. En prenant l'inverse, on obtient $\dfrac{1}{1-(1-p)e^{-pt}} \leqslant \dfrac{1}{p}$. En multipliant les deux membres de cet encadrement par le réel strictement positif $100p$, on obtient $\dfrac{100p}{1-(1-p)e^{-pt}} \leqslant \dfrac{100p}{p}$ ou encore $f_p(t) \leqslant 100$.

D'autre part, $100p > 0$ et $1-(1-p)e^{-pt} > 0$ et donc $f_p(t) > 0$.

Finalement, pour tout réel $t \geqslant 0$, $0 < f_p(t) \leqslant 100$.

2) a) La fonction $f_{0,9}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$ (à savoir la fonction $t \mapsto \dfrac{1-0,1e^{-0,9t}}{90}$) et ne s'annulant pas sur $[0, +\infty[$. De plus, pour $t \geqslant 0$,

$$f'_{0,9}(t) = 90 \times \frac{-\left(1-0,1e^{-0,9t}\right)'}{\left(1-0,1e^{-0,9t}\right)^2} = -90\frac{(-0,1)(-0,9)e^{-0,9t}}{\left(1-0,1e^{-0,9t}\right)^2} = -\frac{8,1e^{-0,9t}}{\left(1-0,1e^{-0,9t}\right)^2}.$$

La fonction $f'_{0,9}$ est donc strictement négative sur $[0, +\infty[$ puis la fonction $f_{0,9}$ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

b) Pour tout réel $t \geqslant 0$, $0 < 1-0,1e^{-0,9t} \leqslant 1$ puis $\dfrac{90}{1-0,1e^{-0,9t}} \geqslant \dfrac{90}{1}$ et finalement $f_{0,9}(t) \geqslant 90$.

c) Le résultat de la question 2.a signifie que, au cours du temps, la population de crevettes va en diminuant. Le résultat de la question 2.b signifie que la population de crevettes ne descendra jamais en dessous de 90 tonnes.

3) Puisque $p > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-pt} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ et donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f_p(t) = \dfrac{100p}{1-(1-p)\times 0} = 100p$.

4) a) La fonction H est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour $t \geqslant 0$,

$$H'(t) = 100 \times \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{t}{2}}}{2-e^{-\frac{t}{2}}} + 50 = \frac{50e^{-\frac{t}{2}}}{2-e^{-\frac{t}{2}}} + 50 = \frac{50e^{-\frac{t}{2}} + 100 - 50e^{-\frac{t}{2}}}{2-e^{-\frac{t}{2}}} = \frac{100}{2-e^{-\frac{t}{2}}}$$

et d'autre part, en multipliant numérateur et dénominateur par $\dfrac{1}{2}$, on obtient

$$f_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{100 \times \frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}} = \frac{100}{2-e^{-\frac{t}{2}}} = H'(t).$$

Donc, la fonction H est une primitive de la fonction $f_{\frac{1}{2}}$ sur $[0, +\infty[$.

b) La masse moyenne cherchée, exprimée en tonnes, est $\dfrac{1}{5-0}\displaystyle\int_0^5 f_{\frac{1}{2}}(t)\,dt$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{5-0}\int_0^5 f_{\frac{1}{2}}(t)\,dt &= \frac{1}{5}\left[H(t)\right]_0^5 = \frac{1}{5}\left(\left(100\ln\left(2-e^{-2,5}\right)+250\right) - \left(100\ln\left(2-e^0\right)+0\right)\right) \\ &= 20\ln\left(2-e^{-2,5}\right)+50.\end{aligned}$$

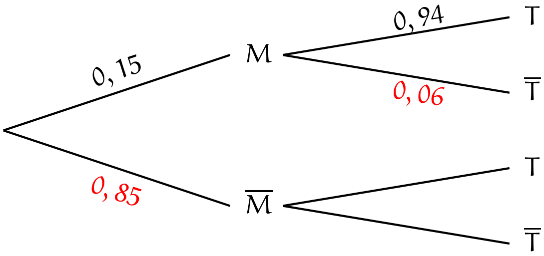
La masse moyenne cherchée, exprimée en tonnes, est de 63 tonnes, arrondi à la tonne.

EXERCICE 2

Partie A

1) Notons M l'événement « l'individu est malade » et T l'événement « l'individu a un test positif ». L'énoncé donne $P(M) = 0,15$, $P_M(T) = 0,94)$ et $P(T) = 0,158$.

Représentons la situation par un arbre de probabilités.



La probabilité demandée est $P_T(M)$.

$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{P(M) \times P_M(T)}{P(T)} = \frac{0,15 \times 0,94}{0,158} = 0,89 \text{ arrondi au centième.}$$

La bonne réponse est la réponse C.

2) Notons n la taille de l'échantillon puis X la variable aléatoire égale au nombre de personnes de cet échantillon ayant un test positif.
n expériences identiques et indépendantes sont effectuées (tester chacune des n personnes de l'échantillon). Chaque expérience a deux issues à savoir « la personne a un test positif » avec une probabilité $p = 0,158$ et « la personne a un test négatif » avec une probabilité $1 - p = 0,842$. La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,158$.

La probabilité qu'au moins une personne ait un test positif est $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0,842)^n$. Mais alors,

$$\begin{aligned}
p(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\Leftrightarrow 1 - (0,842)^n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow (0,842)^n \leqslant 0,01 \\
&\Leftrightarrow \ln\left((0,842)^n\right) \leqslant \ln(0,01) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln(0,842) \leqslant \ln(0,01) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,842)} \text{ (car } \ln(0,842) < 0) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 26,7\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 27 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

La bonne réponse est la réponse B.

3) Notons X la variable aléatoire égale au volume d'une dose.

$$P(1,99 \leqslant X \leqslant 2,01) = P\left(-0,01 \leqslant X - 2 \leqslant 0,01\right) = P\left(-\frac{0,01}{\sigma} \leqslant \frac{X-2}{\sigma} \leqslant \frac{0,01}{\sigma}\right)$$

où cette fois-ci la variable $Z = \dfrac{X-2}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite. L'énoncé donne $P(\left(-\dfrac{0,01}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{0,01}{\sigma}\right) = 0,997$.

Pour des raisons de symétrie, $P\left(Z \leqslant -\dfrac{0,01}{\sigma}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1 - P\left(-\dfrac{0,01}{\sigma} \leqslant \dfrac{X-2}{\sigma} \leqslant \dfrac{0,01}{\sigma}\right)\right)$ et donc

$$\begin{aligned}
P\left(Z \leqslant \frac{0,01}{\sigma}\right) &= P\left(Z \leqslant -\frac{0,01}{\sigma}\right) + P\left(-\frac{0,01}{\sigma} \leqslant \frac{X-2}{\sigma} \leqslant \frac{0,01}{\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - P\left(-\frac{0,01}{\sigma} \leqslant \frac{X-2}{\sigma} \leqslant \frac{0,01}{\sigma}\right)\right) + P\left(-\frac{0,01}{\sigma} \leqslant \frac{X-2}{\sigma} \leqslant \frac{0,01}{\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P\left(-\frac{0,01}{\sigma} \leqslant \frac{X-2}{\sigma} \leqslant \frac{0,01}{\sigma}\right) = 0,5 + \frac{0,997}{2} = 0,9985.
\end{aligned}$$

La calculatrice fournit $\dfrac{0,01}{\sigma} = 2,9677\ldots$ puis $\sigma = 0,0033\ldots$ La bonne réponse est la réponse C.

Partie B

1) Notons X la variable aléatoire égale à la durée d'efficacité à partir du douzième mois. Pour $t \geqslant 0$,

$$P(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda t}$$

et donc aussi $P(X \geqslant t) = P(X > t) = 1 - P(X \leqslant t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$.

L'énoncé donne $P(X \geqslant 6) = 0,887$ et donc $e^{-6\lambda} = 0,887$ puis $\lambda = -\dfrac{\ln(0,887)}{6}$. Mais alors, la durée d'efficacité moyenne, exprimée en mois, à partir du douzième mois qui est aussi l'espérance de X, est $\dfrac{1}{\lambda} = -\dfrac{6}{\ln(0,887)} = 50$ mois, arrondi au mois.

La durée totale moyenne d'efficacité est donc $12 + 50 = 62$ mois arrondi au mois.

2) Soit Y le nombre de personnes malades dans la population. Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 100\,000$ et $p = 0,15$. Puisque n est grand, on approche cette loi binomiale par la loi normale de paramètres $\mu = np = 15\,000$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{12\,750} = 113$ arrondi à l'unité. Soit $Z = \dfrac{Y - 15\,000}{113}$. Z suit la loi normale centrée réduite.

Soit k la taille du stock de médicaments. On veut la valeur minimale de k pour laquelle $P(Y \leqslant k) \geqslant 0,95$. Or, pour $k_0 \in \mathbb{R}$,

$$P\left(Y \leqslant k_0\right) = 0,95 \Leftrightarrow P\left(Z \leqslant \frac{k_0 - 15\,000}{113}\right) = 0,95.$$

La calculatrice donne $\dfrac{k_0 - 15\,000}{113} = 1.64485\ldots$ puis $k_0 = 15\ 186$ arrondi à l'unité. Maintenant, pour $k < k_0$, $P(Y \leqslant k) < P(Y \leqslant k_0) = 0,95$ et pour $k \geqslant k_0$, $P(Y \leqslant k) \geqslant P(Y \leqslant k_0) = 0,95$.

Le stock de médicaments doit être constitué d'au moins $15\,186$ boîtes de médicaments.

EXERCICE 3

1) $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(3-(-3))^2 + (0-0)^2 + (0-0)^2} = 6$.
$AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 + (z_D - z_A)^2} = \sqrt{(0-(-3))^2 + \left(\sqrt{3}-0\right)^2 + \left(2\sqrt{6}-0\right)^2} = \sqrt{9+3+24} = \sqrt{36} = 6$.

Donc, $AB = AD = 6$.

2) a) Le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{3+0}{2}, \dfrac{0+3\sqrt{3}}{2}, \dfrac{0+0}{2}\right)$ ou encore $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$. Le point H (et donc aussi le vecteur $\overrightarrow{OH}$) a pour coordonnées $\left(\dfrac{0+0}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{0+2\sqrt{6}}{2}\right)$ ou encore $\left(0, 2\sqrt{3}, \sqrt{6}\right)$.

Le plan $\mathscr{P}$ est le plan passant par le point I $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{OH}\left(0, 2\sqrt{3}, \sqrt{6}\right)$. Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est $0 \times \left(x - \dfrac{3}{2}\right) + 2\sqrt{3} \times \left(y - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{6} \times (z - 0) = 0$ ou encore $2y\sqrt{3} + z\sqrt{6} - 9 = 0$.

b) Le point J a pour coordonnées $\left(\dfrac{3+0}{2}, \dfrac{0+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{0+2\sqrt{6}}{2}\right)$ ou encore $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{6}\right)$.
$2y_J\sqrt{3} + z_J\sqrt{6} - 9 = 2 \times \dfrac{3}{2} + \sqrt{6} \times \sqrt{6} - 9 = 3 + 6 - 9 = 0$. Donc, le point J appartient au plan $\mathscr{P}$.

Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées $\left(-3, \sqrt{3}, 2\sqrt{6}\right)$.

$$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{OH} = (-3) \times 0 + \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6} \times \sqrt{6} = 18 \neq 0.$$

Donc, la droite (BD) n'est pas parallèle au plan $\mathscr{P}$ et par suite, la droite (BD) est sécante au plan $\mathscr{P}$ en un point. Puisque le point J appartient à la fois au plan $\mathscr{P}$ et à la droite (BD), le point J est le point d'intersection de la droite (BD) et du plan $\mathscr{P}$.

c) La droite (AD) est la droite passant par le point $A(-3, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AD}\left(3, \sqrt{3}, 2\sqrt{6}\right)$. Une représentation paramétrique de la droite (AD) est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x = -3 + 3t \\ y = t\sqrt{3} \\ z = 2t\sqrt{6} \end{array}\right. \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Soit $M\left(-3 + 3t, t\sqrt{3}, 2t\sqrt{6}\right)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (AD).

$$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\left(t\sqrt{3}\right) + \sqrt{6}\left(2t\sqrt{6}\right) - 9 = 0 \Leftrightarrow 18t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Pour $t = \dfrac{1}{2}$, on obtient les coordonnées du point K : $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{6}\right)$. On note que le point K est le milieu du segment $[AD]$.

d) Le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ et le point J a pour coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{6}\right)$. Donc, le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(0, -\sqrt{3}, \sqrt{6}\right)$.

Le point K a pour coordonnées $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{6}\right)$ et donc le vecteur $\overrightarrow{JK}$ a pour coordonnées $(-3, 0, 0)$.

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{JK} = 0 \times (-3) + \left(-\sqrt{3}\right) \times 0 + \sqrt{6} \times 0 = 0.$$

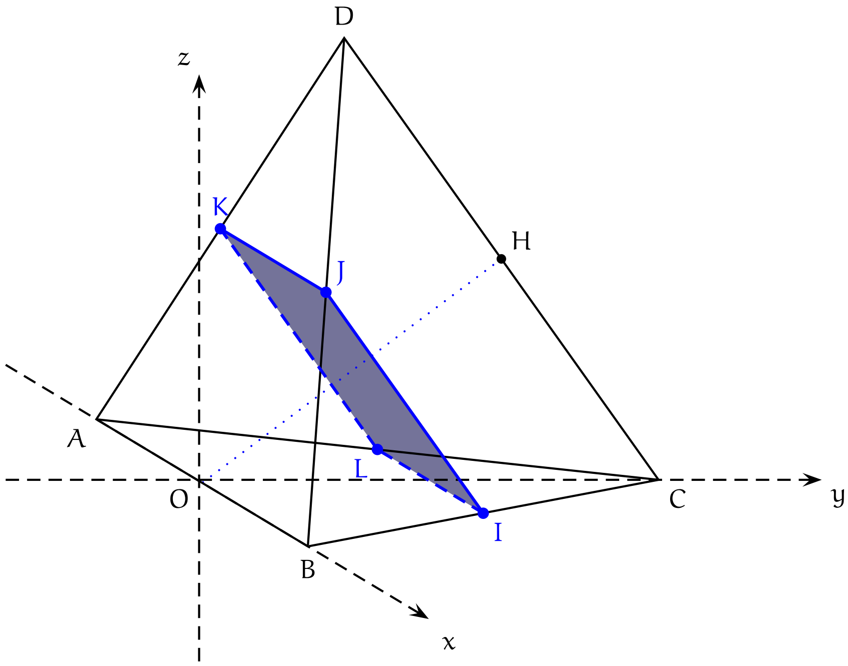
Donc, les droites (IJ) et (JK) sont orthogonales. De plus, les droites (IJ) et (JK) ont le point J en commun et donc les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires.

e) Puisque le tétraèdre est régulier, par symétrie des rôles des points A, B, C et D, le plan $\mathscr{P}$ coupe la droite (AC) en le milieu L du segment $[AC]$. La section du tétraèdre $ABCD$ par le plan $\mathscr{P}$ est le quadrilatère $IJKL$.

Dans le triangle ABD, la droite des milieux (JK) est parallèle à la droite (AB) et dans le triangle ABC, la droite des milieux (IL) est parallèle à la droite (AB). Donc, la droite (JK) est parallèle à la droite (IL). De même, la droite (IJ) est parallèle à la droite (KL). Donc, le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

$IJ = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{1}{2}AB = JK$ et donc le parallélogramme $IJKL$ est un losange. $(IJ) \perp (JK)$ d'après la question d et donc le quadrilatère $IJKL$ est un rectangle.

Finalement, la section du tétraèdre par le plan $\mathscr{P}$ est le carré $IJKL$.



3) Par symétrie des rôles des points A, B, C et D, les droites (JO) et (JI) sont perpendiculaires (d'après la question 2.d) ou encore le point $M = J$ est un point de la droite (BD) tel que le triangle OMI soit rectangle en M.

EXERCICE 4.

1) D'après le théorème de PYTHAGORE, $a^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ puis $b^2 = u^2 + 1$ et $c^2 = v^2 + 1$. Donc, puisque a, b et c sont des réels positifs,

$$ab = c \Leftrightarrow a^2b^2 = c^2 \Leftrightarrow 2\left(u^2+1\right) = v^2 + 1 \Leftrightarrow v^2 - 2u^2 = 1.$$

2) Algorithme complété

Pour u allant de 1 à 1000 faire
    Pour v allant de 1 à 1000
        Si $v^2 - 2u^2 = 1$
            Afficher u et v
        Fin Si
    Fin Pour
Fin Pour
	Au cours de son exécution,
	l'algorthme affiche :
	2 3
	12 17
	70 99
	408 577

3) a) $v^2 = 1 + 2u^2 = 1 + u^2 + u^2 > u^2$ et donc $v > u$ puisque u et v sont des entiers naturels non nuls.

b) Soit n un entier naturel.

Si n est pair, $n \equiv 0$ [2] puis $n^2 \equiv 0^2$ [2] ou encore $n^2 \equiv 0$ [2] et donc n^2 est pair.
Si n est impair, $n \equiv 1$ [2] puis $n^2 \equiv 1^2$ [2] ou encore $n^2 \equiv 1$ [2] et donc n^2 est impair.

En résumé, n et n^2 ont la même parité.

c) $v^2 = 2u^2 + 1$ est un nombre impair. D'après la question précédente, v est nécessairement un nombre impair.

d) $v^2 = 2u^2 - 1 \Rightarrow 2u^2 = v^2 - 1 \Rightarrow 2u^2 = (v-1)(v+1)$. Puisque v est impair,il existe un entier naturel k tel que $v = 2k+1$. Mais alors, $2u^2 = (2k)(2k+2) = 4k(k+1)$ puis $u^2 = 2k(k+1)$. L'entier u^2 est donc un entier pair. D'après la question b), u est nécessairement pair.

4) a) Soit (u, v) un couple d'entiers naturels non nuls tel que $v^2 - 2u^2 = 1$. Posons $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = AX$. On a donc $u' = 3u + 2v$ et $v' = 4u + 3v$ de sorte que u' et v' sont des entiers naturels non nuls puis

$$v'^2 - 2u'^2 = (4u + 3v)^2 - 2(3u + 2v)^2 = 16u^2 + 24uv + 9v^2 - 18u^2 - 24uv - 8v^2 = v^2 - 2u^2 = 1.$$

Donc, AX est encore une solution de l'équation (E).

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, A^nX est une solution de l'équation (E).

- $A^0X = I_2X = X$ est une solution de (E). Donc, l'affirmation est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que A^nX soit une solution de (E). Alors, $A^{n+1}X = A \times A^nX$ est une solution de (E) d'après la question précédente.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, A^nX est une solution de l'équation (E).

c) On pose $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ puis pour tout entier naturel n, $X_n = A^nX = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. On a donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 2v_n$ et $v_{n+1} = 4u_n + 3v_n$.
X_0 est une solution de (E) d'après la question 2 et donc pour tout entier naturel n, X_n est une solution de (E) d'après la question précédente. Voici un tableau contenant les premières valeurs de u_n et v_n.

n	u_n	v_n
0	2	3
1	12	17
2	70	99
3	408	577
4	2 378	3 363
5	13 860	19 601

Le couple $(u, v) = (13\,860, 19\,601)$ est un couple solution de (E) tel que $v > 10\,000$.

