Polynésie. Septembre 2017.
Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) a) La probabilité demandée est $P(T \geqslant 140)$. La calculatrice fournit $P(T \geqslant 140) = 0,8944$ arrondi à 10^{-4}.

b) La probabilité demandée est $P(10 \leqslant X \leqslant 70)$. La calculatrice fournit $P(10 \leqslant X \leqslant 70) = 0,8710$ arrondi à 10^{-4}.

c) Notons TE l'événement « le visiteur a la taille exigée » et AR l'événement « la visiteur a l'âge requis ». L'énoncé donne $P(TE) = 0,89$, $P(AR) = 0,87$ et $P\left(\overline{TE} \cap \overline{AR}\right) = 0,08$ et demande $P(TE \cap AR)$. Ecrivons ces données dans un tableau à double entrée :

	TE	$\overline{TE}$	Total
AR			0,87
$\overline{AR}$		0,08	
Total	0,89		1

On peut alors compléter en

	TE	$\overline{TE}$	Total
AR			0,87
$\overline{AR}$		0,08	0,13
Total	0,89	0,11	1

puis en

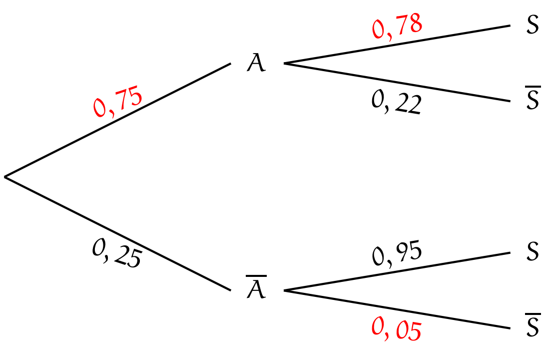
	TE	$\overline{TE}$	Total
AR		0,03	0,87
$\overline{AR}$	0,05	0,08	0,13
Total	0,89	0,11	1

et enfin en

	TE	$\overline{TE}$	Total
AR	0,84	0,03	0,87
$\overline{AR}$	0,05	0,08	0,13
Total	0,89	0,11	1

Donc, $P(TE \cap AR) = 0,84$. 84% ont les conditions requises pour essayer la nouvelle attraction.

2) a) L'énoncé donne $P(\overline{A} = 0,25)$, $P_{\overline{A}}(S) = 0,95$ puis $P_A\left(\overline{S}\right) = 0,22$. Représentons alors la situation par un arbre de probabilités.



La probabilité demandée est $P(S)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(S) = P(A) \times P_A(S) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(S) = 0,75 \times 0,78 + 0,25 \times 0,95 = 0,822\,5.$$

b) La probabilité demandée est $P_{\overline{S}}\left(\overline{A}\right)$.

$$P_{\overline{S}}\left(\overline{A}\right)=\frac{P\left(\overline{S}\cap\overline{A}\right)}{P\left(\overline{S}\right)}=\frac{P\left(\overline{A}\right)\times P_{\overline{A}}\left(\overline{S}\right)}{1-P\left(S\right)}=\frac{0,25\times 0,05}{1-0,822\ 5}=\frac{0,01\ 5}{0,177\ 5}=0,0704 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

3) Ici, $n=200$ et on veut tester l'hypothèse $p=0,822\ 5$ (la probabilité qu'un visiteur soit satisfait ne doit pas changer). On note que $n\geqslant 30$, $np=164,5$ et donc $np\geqslant 5$ et aussi $n(1-p)=35,5$ et donc $n(1-p)\geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\begin{aligned}\left[p-1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}};p+1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]&=\left[0,822\ 5-1,96\sqrt{\frac{0,822\ 5\times 0,177\ 5}{200}};0,822\ 5+1,96\sqrt{\frac{0,822\ 5\times 0,177\ 5}{200}}\right]\\&=[0,769\ 5;0,877\ 5]\end{aligned}$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée de personnes satisfaites est

$$f=\frac{200-46}{200}=\frac{154}{200}=0,77.$$

Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation (de très peu). On ne peut peut donc rejeter l'hypothèse faite sur p au risque de se tromper de 5%. On sait qu'on ne peut alors rien en conclure et donc on peut à peine rassurer le directeur.

EXERCICE 2

Partie A

1) Soit a un réel. On suppose $N_0 \neq 0$.

$$N_{14} = 2 \times N_0 \Leftrightarrow N_0 e^{a\times 14} = 2 \times N_0 \Leftrightarrow e^{14a} = 2 \Leftrightarrow 14a = \ln 2 \Leftrightarrow a = \frac{\ln 2}{14}.$$

Donc, $a = \dfrac{\ln 2}{14} = 0,05$ arrondi à 10^{-3}.

2) Soient t et t' deux réels positifs. $N(t') = N_0 e^{0,05t'} = N_0 e^{0,05t} \times e^{0,05(t'-t)} = N(t)e^{0,05(t'-t)}$.
Supposons qu'à la semaine t, on ait $N(t) \leqslant 10^4$. On cherche t' tel que $N(t') \geqslant 10^9$. La durée demandée, exprimée en semaines, est alors $d = t' - t$.

$$\begin{aligned}
N(t') \geqslant 10^9 &\Leftrightarrow N(t)e^{0,05(t'-t)} \geqslant 10^9\\
&\Rightarrow 10^4 e^{0,05d} \geqslant 10^9 \text{ (car } 10^4 \geqslant N(t))\\
&\Leftrightarrow e^{0,05d} \geqslant \frac{10^9}{10^4} \Leftrightarrow e^{0,05d} \geqslant 10^5\\
&\Leftrightarrow 0,05d \geqslant \ln\left(10^5\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction ln sur }]0,+\infty[)\\
&\Leftrightarrow d \geqslant \frac{5\ln(10)}{0,05} \Leftrightarrow d \geqslant 100\ln(10)\\
&\Leftrightarrow d \geqslant 230,2\ldots
\end{aligned}$$

Il faudra donc attendre au moins 230 semaines avant que la tumeur ne soit de nouveau détectable au toucher.

Partie B

1) a) Les différentes mesures se traduisent par les égalités : $D = 112$ et $c(6) = 6,8$.

$$c(6) = 6,8 \Leftrightarrow \frac{112}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{80}\times 6}\right) = 6,8 \Leftrightarrow \frac{112}{k}\left(1 - e^{-\frac{3}{40}k}\right) = 6,8 \Leftrightarrow 112\left(1 - e^{-\frac{3}{40}k}\right) - 6,8k = 0.$$

b) • Pour $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = 112\left(1 - e^{-\frac{3}{40}x}\right) - 6,8x$. La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = 112\left(-\left(-\frac{3}{40}e^{-\frac{3}{40}x}\right)\right) - 6,8 = 8,4e^{-\frac{3}{40}x} - 6,8.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 8,4e^{-\frac{3}{40}x} - 6,8 > 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{3}{40}x} > \frac{6,8}{8,4} \Leftrightarrow e^{-\frac{3}{40}x} > \frac{17}{22}\\
&\Leftrightarrow -\frac{3}{40}x > \ln\left(\frac{17}{21}\right) \Leftrightarrow \frac{3}{40}x < \ln\left(\frac{21}{17}\right)\\
&\Leftrightarrow x < \frac{40}{3}\ln\left(\frac{21}{17}\right).
\end{aligned}$$

De même, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{40}{3}\ln\left(\dfrac{21}{17}\right)$ (et aussi $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{40}{3}\ln\left(\dfrac{21}{17}\right)$).

• La fonction f est donc strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{40}{3}\ln\left(\dfrac{21}{17}\right)\right]$. Donc, pour $x \in \left]0, \dfrac{40}{3}\ln\left(\dfrac{21}{17}\right)\right]$, $f(x) > f(0)$ ou encore $f(x) > 0$. En particulier, la fonction f ne s'annule pas dans l'intervalle $\left]0, \dfrac{40}{3}\ln\left(\dfrac{21}{17}\right)\right]$.

• La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{40}{3}\ln\left(\dfrac{21}{17}\right), +\infty\right[$. On sait que pour tout réel y de l'intervalle $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f\left(\dfrac{40}{3}\ln\left(\dfrac{21}{17}\right)\right)\right]$, l'équation $f(x) = y$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $\left[\dfrac{40}{3}\ln\left(\dfrac{21}{17}\right), +\infty\right[$.

D'une part, la calculatrice fournit $f\left(\dfrac{40}{3}\ln\left(\dfrac{21}{17}\right)\right) = 2,17\ldots$ et donc $f\left(\dfrac{40}{3}\ln\left(\dfrac{22}{17}\right)\right) > 0$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{3}{40}x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{-X} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 112\left(1-e^{-\frac{3}{40}x}\right) = 112$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} -6,8x = -\infty$. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

On en déduit que 0 appartient à l'intervalle $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f\left(\dfrac{40}{3}\ln\left(\dfrac{21}{17}\right)\right)\right]$ et donc que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $\left[\dfrac{40}{3}\ln\left(\dfrac{21}{17}\right), +\infty\right[$ puis dans $]0, +\infty[$.

c) Cette solution est la clairance du patient. La calculatrice fournit $f(5,84) = 0,01\ldots$ et donc $f(5,84) > 0$ et aussi $f(5,85) = -0,002\ldots$ et donc $f(5,85) < 0$. On en déduit que la clairance k du patient vérifie $5,84 < k < 5,85$.

Une valeur approchée à 10^{-2} près par excès de la clairance k du patient est $5,85$.

2) a) On a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{3}{40}x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} c(t) = \dfrac{D}{k}$.

b) $\dfrac{D}{k} = 16 \Leftrightarrow D = 16k \Leftrightarrow D = 16 \times 5,85 \Leftrightarrow D = 93,6$. Le débit doit être de $93,6\mu\text{molL}^{-1}$.

EXERCICE 3

1) Soit θ un réel.

$$\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[\Rightarrow -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > 0.$$

2) L'origine O n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$ (car $0 \neq -0+2$). Soit M un point du plan distinct de l'origine O. Notons (x, y) les coordonnées cartésiennes du point M et notons ρ le module de $z = z_M$ et θ un argument de z. On note que $\rho > 0$ et d'autre part, on peut choisir $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} + 2\pi\right[$, ce que l'on fait.

• On rappelle que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Ces résultats sont obtenus par identification des parties réelles et imaginaires dans l'égalité

$$x + iy = z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta.$$

• On note ensuite que si $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} + \pi\right[= \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$, alors $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > 0$ d'après la question précédente, si $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4} + \pi, -\frac{\pi}{4} + 2\pi\right[= \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right[$, alors $\frac{\pi}{2} < \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}$ puis $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) < 0$ et si $\theta \in \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$, alors $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 0$. En résumé, pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} + 2\pi\right[$, $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow \theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$.

• On a alors pour M distinct de O,

$$\begin{aligned}
\rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} \text{ et } \theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[&\Leftrightarrow \rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} \text{ et } \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \\
&\Leftrightarrow \rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} \text{ (Voir I.)} \\
&\Leftrightarrow \rho\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \text{ (voir \textbf{II.})} \\
&\Leftrightarrow \rho\left(\cos(\theta)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(\theta)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\cos(\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin(\theta) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) = \sqrt{2} \Leftrightarrow x + y = 2 \\
&\Leftrightarrow y = -x + 2 \Leftrightarrow M \in \mathscr{D}.
\end{aligned}$$

I. L'implication $\Rightarrow$ est immédiate. D'autre part, pour $\Leftarrow$, si $\rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$, on a nécessairement $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > 0$ car ρ et $\sqrt{2}$ sont strictement positifs.

II. L'implication $\Rightarrow$ est immédiate. D'autre part, pour $\Leftarrow$, si $\rho\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, on ne peut avoir $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ car $\sqrt{2} \neq 0$ et on peut donc rediviser les deux membres de l'égalité pour obtenir $\rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$.

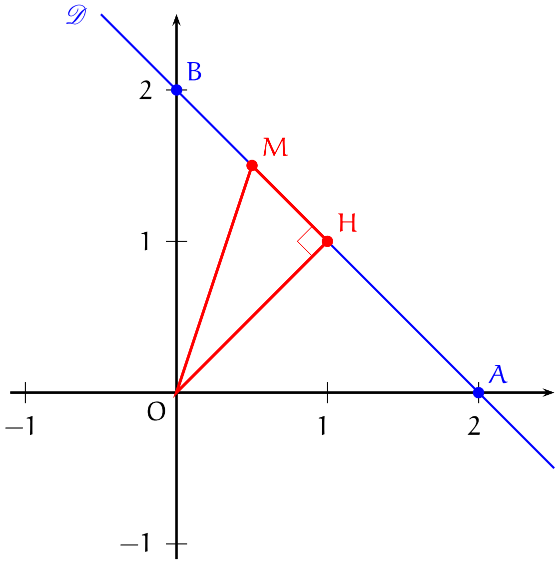
3) Soit M un point de $\mathscr{D}$. $OM = |z_M| = \rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$. Il s'agit de trouver la valeur minimale de OM quand M décrit le droite $\mathscr{D}$ et donc de trouver la valeur minimale de $\frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$ quand θ décrit $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$.

La valeur minimale de $\frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$ est obtenue quand la valeur de $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ est maximale (par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$ et puisque $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > 0$ quand $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$) ce qui correspond au cas où $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$, on a $\theta - \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \theta - \frac{\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Quand $\theta = \frac{\pi}{4}$, on obtient $\rho = \sqrt{2}$ puis $x_M = \rho\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$ puis $y_M = -x_M + 2 = 1$.

Le point de $\mathscr{D}$ qui est le plus proche de O est le point H de coordonnées $(1, 1)$ et on a dans ce cas $OH = \sqrt{2}$.



On note que le point $H(1, 1)$ est le milieu du segment $[AB]$. Puisque le triangle OAB est isocèle en O, H est encore le pied de la hauteur issue de O du triangle OAB. Par suite, d'après le théorème de Pythagore, pour tout point M de $\mathscr{D}$,

$$OM^2 = OH^2 + HM^2 \geqslant OH^2$$

avec égalité si et seulement si $M = H$ puis $OM \geqslant OH$ avec égalité si et seulement si $M = H$ (on retrouve autrement la position du point M qui fournit la distance minimale).

EXERCICE 4.

Partie A

1) Les nombres de tortues, en milliers, au début des années 2001 et 2002, sont respectivement u_1 et u_2.

$u_1 = 0,9u_0(1-u_0) = 0,9\times 0,3\times(1-0,3) = 0,189$. Le nombre de tortues en 2001 est $0,189$ milliers ou encore 189.
$u_2 = 0,9\times 0,189\times(1-0,189) = 0,1379511$. Le nombre de tortues en 2002 est donc d'environ 138 tortues.

2) a) Soit $n \geqslant 0$. D'après les résultats admis par l'énoncé, $1-u_n \leqslant 1$ et donc, en multipliant les deux membres de cette inégalité par le réel $0,9u_n$ qui est positif, on obtient $0,9u_n\left(1-u_n\right) \leqslant 0,9u_n$ ou encore $u_{n+1} \leqslant 0,9u_n$. D'autre part, l'inégalité $0 \leqslant u_{n+1}$ est admise par l'énoncé.

On a montré que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,9u_n$.

b) On sait déjà que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n$. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0,3\times 0,9^n$.

- $0,3\times 0,9^0 = 0,3 = u_0$ et en particulier, $u_0 \leqslant 0,3\times 0,9^0$. L'inégalité à démontrer est vraie quand $n=0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n \leqslant 0,3\times 0,9^n$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 0,9u_n\\
&\leqslant 0,9\times 0,3\times 0,9^n \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\
&\leqslant 0,3\times 0,9^{n+1}.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0,3\times 0,9^n$. Finalement, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3\times 0,9^n$.

c) Puisque $-1 < 0,9 < 1$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,3\times 0,9^n = 0$. D'après le théorème des gendarmes, puisque pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3\times 0,9^n$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. La population de tortues analysées est donc en voie d'extinction.

3) Algorithme complété.

Variables :	u est un réel
	n est un entier naturel
Traitement :	u prend la valeur $0,3$
	n prend la valeur 0
	Tant que $u \geqslant 0,03$ faire :
	u prend la valeur $0,9\times u\times(1-u)$
	n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $n-1$

On prendra garde au fait que quand l'algorithme s'arrête n est 1 de plus que le numéro de la dernière année avant laquelle il reste au moins 30 tortues et il faut donc afficher $n-1$.

Partie B

1) $v_{11} = 1,06\times v_{10}\left(1-v_{10}\right) = 1,06\times 0,032\times(1-0,032) = 0,0328\ldots$ et $v_{12} = 1,06\times v_{11}\left(1-v_{11}\right) = 0,0336\ldots$
En 2011 et en 2012, il y a environ 32 et 33 tortues respectivement.

2) Pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 1,06v_n\left(1-v_n\right)$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1,06v_n\left(1-v_n\right) = 1,06\ell(1-\ell)$.
Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\ell = 1,06\ell(1-\ell)$.

3) Puisque la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a $\ell \geqslant v_{10}$ ou encore $\ell \geqslant 0,032$. En particulier, $\ell \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\ell = 1,06\ell(1-\ell) &\Rightarrow \ell - 1,06\ell(1-\ell) = 0 \Rightarrow \ell(1-1,06(1-\ell)) = 0 \Rightarrow \ell(-0,06+1,06\ell) = 0\\
&\Rightarrow -0,06+1,06\ell = 0 \text{ (car } \ell \neq 0)\\
&\Rightarrow \ell = \frac{0,06}{1,06} \Rightarrow \ell = 0,566\ldots
\end{aligned}$$

Ceci signifie qu'à long terme, la population de tortues devrait se stabiliser autour de 57 individus. Cette population de tortues n'est donc plus en voie d'extinction.

