France métropolitaine. Septembre 2017.
Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) a) Soit n un entier naturel. D'après la relation de CHASLES

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} e^{-x^2}\,dx - \int_0^n e^{-x^2}\,dx = \int_n^0 e^{-x^2}\,dx + \int_0^{n+1} e^{-x^2}\,dx = \int_n^{n+1} e^{-x^2}\,dx.$$

Pour tout réel x de $[n, n+1]$, $e^{-x^2} \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_n^{n+1} e^{-x^2}\,dx \geqslant 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b) Soit x un réel. $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ et donc $0 \leqslant x^2 - 2x + 1$ puis $-x^2 \leqslant -2x + 1$. Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $e^{-x^2} \leqslant e^{-2x+1}$.

Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[0, n]$, on a $e^{-x^2} \leqslant e^{-2x+1}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^n e^{-x^2}\,dx \leqslant \int_0^n e^{-2x+1}\,dx$. Ensuite,

$$\int_0^n e^{-2x+1}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x+1}\right]_0^n = \left(-\frac{1}{2}e^{-2n+1}\right) - \left(-\frac{1}{2}e^{0+1}\right) = \frac{e}{2} - \frac{e^{-2n+1}}{2}.$$

Puisque $\dfrac{e^{-2n+1}}{2} > 0$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^n e^{-x^2}\,dx \leqslant \int_0^n e^{-2x+1}\,dx < \frac{e}{2}$ et finalement, $u_n < \dfrac{e}{2}$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $u_n < \dfrac{e}{2}$.

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante d'après a), et majorée (par $\dfrac{e}{2}$) d'après b). On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2) a) La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est positive sur $[0, 2]$. Donc, u_2 est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}$. L'aire, exprimée en unités d'aire, de OABC est égale à $OA \times OC$ c'est-à-dire 2. Donc,

$$u_2 = \text{aire de } \mathscr{D} = p \times \text{aire de OABC} = 2p.$$

b) i) La condition de la ligne L8 est vérifiée si et seulement si le point $M(X, Y)$ appartient au domaine $\mathscr{D}$.

b) ii) L'algorithme génère N points aléatoires de coordonnées (X, Y) à l'intérieur du rectangle OABC. Le compteur C dénombre parmi ces N points ceux qui sont dans le domaine $\mathscr{D}$. $F = \dfrac{C}{N}$ est donc la fréquence d'appartenance d'un point au domaine $\mathscr{D}$.

b) iii) Quand N est très grand, la fréquence F obtenue expérimentalement est proche de la probabilité théorique p.

c) La fréquence est $F = \dfrac{441\ 138}{1\ 000\ 000} = 0{,}441\ 138$. Donc, $0{,}440\ 138 \leqslant p \leqslant 0{,}442\ 138$ puis

$$0{,}880\ 276 \leqslant 2p \leqslant 0{,}884276$$

et en particulier, $0{,}88 \leqslant 2p \leqslant 0{,}89$. Puisque $u_2 = 2p$, une valeur approchée par défaut de u_2 à 10^{-2} près est $0{,}88$.

Partie B

1) Soit x un réel de $[0, 2]$. $A(x) = ON \times OP = xe^{-x^2}$.

2) La fonction A est dérivable sur $[0, 2]$ et pour $x \in [0, 2]$,

$$A'(x) = 1 \times e^{-x^2} + x \times (-2x)e^{-x^2} = \left(1 - 2x^2\right)e^{-x^2} = \left(1 - x\sqrt{2}\right)\left(1 + x\sqrt{2}\right)e^{-x^2}.$$

Pour tout réel x de $[0, 2]$, $\left(1 + x\sqrt{2}\right)e^{-x^2} > 0$ et donc $A'(x)$ est du signe de $1 - x\sqrt{2}$. En tenant compte du fait que $0 < \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 2$, on en déduit que la fonction A' est strictement positive sur $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$, strictement négative sur $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 2\right]$ et s'annule en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On en déduit encore que la fonction A est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$. Finalement, la fonction A admet un maximum en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et ce maximum est

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}.$$

Le point M de $\mathscr{C}_f$ pour lequel l'aire du rectangle $ONMP$ est maximale est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

3) L'unité d'aire est 1m^2. L'aire à peindre en bleu est l'aire maximale de $ONMP$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$. L'aire à peindre en blanc est $u_2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$.

La calculatrice fournit $0,428 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \leqslant 0,429$ et donc une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire à peindre en bleu est $0,42$ m^2. D'autre part, $0,880 \leqslant u_2 \leqslant 0,885$ et donc

$$0,880 - 0,429 \leqslant u_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \leqslant 0,885 - 0,428$$

ou encore $0,451 \leqslant u_2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \leqslant 0,457$. Une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire à peindre en bleu est $0,45$ m^2.

EXERCICE 2

1) Le discriminant de l'équation proposée est $\Delta = 2^2 - 4(-1)(-2) = -4 < 0$. L'équation proposée admet deux solutions non réelles conjuguées :

$$z_1 = \frac{-2+2i}{2(-1)} = 1 - i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 1 + i.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. $z' = 2 \Leftrightarrow -z^2 + 2z = 2 \Leftrightarrow -z^2 + 2z - 2 = 0 \Leftrightarrow z \in \{1+i, 1-i\}$. Les points du plan dont l'image est le point d'affixe 2 sont les points d'affixes respectives $1+i$ et $1-i$.

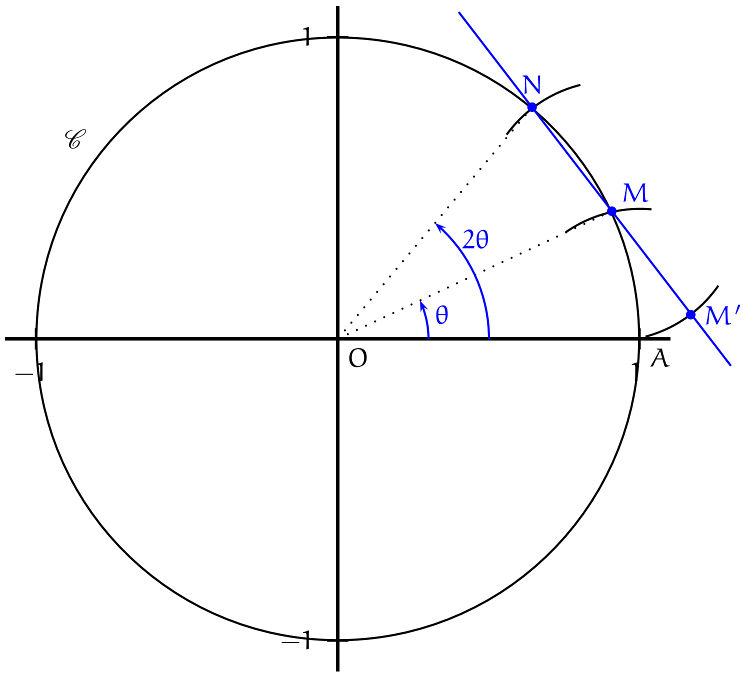
2)

$$\frac{z_N + z_{M'}}{2} = \frac{z^2 + (-z^2 + 2z)}{2} = z = z_M.$$

Donc, le point M est le milieu du segment $[NM']$.

3) a) $|z| = OM = 1$. Donc, z est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ. On en déduit que $z = e^{i\theta}$. Mais alors, $z_N = z^2 = e^{2i\theta}$ et donc un argument de z_N est 2θ.

b) Construction. On plante le compas en A avec une ouverture AM. On reporte ensuite au compas l'arc $\widehat{AM}$ pour obtenir le point N. On trace la droite (NM). On reporte le distance NM au compas à partir de M sur la droite (NM) et on obtient le point M'.



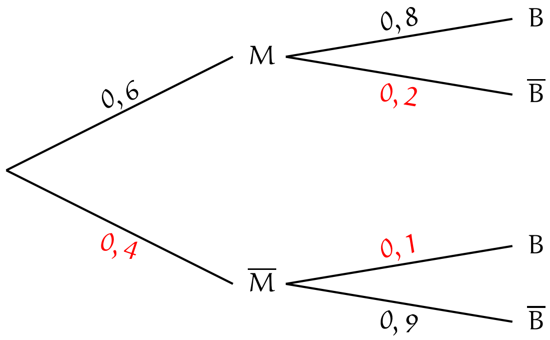
c) $MA = MN = MM'$ et donc le triangle AMM' est isocèle en M.

EXERCICE 3

1) a) La calculatrice fournit $P(1,04 \leqslant T \leqslant 2,64) = 0,954$ arrondi au millième. On note que la probabilité demandée est $P(\mu - 2\sigma \leqslant T \leqslant \mu + 2\sigma)$ et donc que cette probabilité est fournie dans le cours (à 10^{-2} près en général).

b) La calculatrice fournit $P(T \geqslant 1,2) = 0,945$ arrondi au millième.

2) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap M) + P\left(B \cap \overline{M}\right) = P(M) \times P_M(B) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(B) \\ &= 0,6 \times 0,8 + 0,4 \times 0,1 = 0,48 + 0,04 = 0,52. \end{aligned}$$

La probabilité que le taux de cholestérol baisse est $0,52$.

c) La probabilité demandée est $P_B(M)$.

$$P_B(M) = \frac{P(B \cap M)}{P(B)} = \frac{P(M) \times P_M(B)}{P(B)} = \frac{0,6 \times 0,8}{0,52} = \frac{12}{13} = 0,923 \text{ arrondi au millième.}$$

3) a) Ici, $n = 100$ et on veut tester l'hypothèse $p = 0,3$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 30 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 70 \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,3 - 1,96\sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{100}}, 0,3 + 1,96\sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{100}}\right] = [0,210; 0,390]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

b) La fréquence observée est $f = \dfrac{37}{100} = 0,37$. Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation. On ne peut donc pas rejeter l'hypothèse $p = 0,3$ au seuil 95%.

c) Notons n l'effectif de l'échantillon. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,37 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, 0,37 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

$$\begin{aligned} 0,3 \notin \left[0,37 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 0,37 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] &\Leftrightarrow 0,3 < 0,37 - \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ (car } 0,37 + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 0,3) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < 0,07 \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{0,07} \Leftrightarrow n > \frac{1}{0,07^2} \\ &\Leftrightarrow n > 204,08\ldots \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 205 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

L'effectif minimal de l'échantillon est 205.

EXERCICE 4.

1) dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, le point E a pour coordonnées $(0, 0, 1)$ et le point H a pour coordonnées $(0, 1, 1)$. Le point I a donc pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$.
De même, le point F a pour coordonnées $(1, 0, 1)$ et le point B a pour coordonnées $(1, 0, 0)$. Le point J a donc pour coordonnées $\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$.

2) a) Le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$. Le vecteur $\overrightarrow{BI}$ a pour coordonnées $\left(-1, \frac{1}{2}, 1\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $(0, 1, 1)$. Les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI).

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{BI} = 1 \times (-1) + (-2) \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 = -1 - 1 + 2 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{BG} = 1 \times 0 + (-2) \times 1 + 2 \times 1 = -2 + 2 = 0.$$

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI) et donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

b) Le plan (BGI) est le plan passant par $B(1, 0, 0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(1, -2, 2)$. Une équation cartésienne du plan (BGI) est $1 \times (x - 1) + (-2)(y - 0) + 2(z - 0) = 0$ ou encore

$$x - 2y + 2z = 1.$$

c) Le point H a pour coordonnées $(0, 1, 1)$ et le point J a pour coordonnées $\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$. Le point K a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

$$x_K - 2y_K + 2z_K = \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{2} = 1.$$

Donc, le point K appartient au plan (BGI).

3) a) L'aire du triangle FIG est la moitié de l'aire du carré $EFGH$ c'est-à-dire $\frac{1}{2}$. La droite (BF) est perpendiculaire aux droites (FG) et (FE) qui sont deux droites sécantes du plan (FGI). Donc, la droite (BF) est orthogonale au plan (FGI). Finalement,

$$\text{Volume de } FBIG = \frac{1}{3}(\text{ aire de } FGI) \times BF = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}.$$

b) La droite Δ est la droite passant par $F(1, 0, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(1, -2, 2)$. Une représentation paramétrique de cette droite est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 1 + 2t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

c) Soit $M(1 + t, -2t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ.

$$M \in (BGI) \Leftrightarrow (1 + t) - 2(-2t) + 2(1 + 2t) = 1 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{9}.$$

Quand $t = -\frac{2}{9}$, on obtient effectivement le point F' de coordonnées $\left(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$.

d) FF' est donc la hauteur associée à la base BGI du tétraèdre $FBIG$. De plus,

$$FF' = \sqrt{\left(1 - \frac{7}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{9}\right)^2} = \frac{1}{9}\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \frac{\sqrt{36}}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

$\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de } BGI) \times FF' = \frac{1}{3} \times (\text{aire de } BGI) \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}(\text{aire de } BGI)$ et donc

$$\text{aire de } BGI = \frac{1/6}{2/9} = \frac{1}{6} \times \frac{9}{2} = \frac{3}{4}.$$

