France métropolitaine. Septembre 2017. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) a) Soit n un entier naturel. D'après la relation de Chasles

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} e^{-x^2}\,dx - \int_0^n e^{-x^2}\,dx = \int_n^0 e^{-x^2}\,dx + \int_0^{n+1} e^{-x^2}\,dx = \int_n^{n+1} e^{-x^2}\,dx.$$

Pour tout réel x de $[n, n+1]$, $e^{-x^2} \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_n^{n+1} e^{-x^2}\,dx \geqslant 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b) Soit x un réel. $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ et donc $0 \leqslant x^2 - 2x + 1$ puis $-x^2 \leqslant -2x + 1$. Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $e^{-x^2} \leqslant e^{-2x+1}$.

Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[0, n]$, on a $e^{-x^2} \leqslant e^{-2x+1}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^n e^{-x^2}\,dx \leqslant \int_0^n e^{-2x+1}\,dx$. Ensuite,

$$\int_0^n e^{-2x+1}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x+1}\right]_0^n = \left(-\frac{1}{2}e^{-2n+1}\right) - \left(-\frac{1}{2}e^{0+1}\right) = \frac{e}{2} - \frac{e^{-2n+1}}{2}.$$

Puisque $\dfrac{e^{-2n+1}}{2} > 0$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^n e^{-x^2}\,dx \leqslant \int_0^n e^{-2x+1}\,dx < \frac{e}{2}$ et finalement, $u_n < \dfrac{e}{2}$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $u_n < \dfrac{e}{2}$.

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante d'après a), et majorée (par $\dfrac{e}{2}$) d'après b). On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2) a) La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est positive sur $[0, 2]$. Donc, u_2 est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}$. L'aire, exprimée en unités d'aire, de $OABC$ est égale à $OA \times OC$ c'est-à-dire 2. Donc,

$$u_2 = \text{aire de } \mathscr{D} = p \times \text{aire de } OABC = 2p.$$

b) i) La condition de la ligne L8 est vérifiée si et seulement si le point $M(X, Y)$ appartient au domaine $\mathscr{D}$.

b) ii) L'algorithme génère N points aléatoires de coordonnées (X, Y) à l'intérieur du rectangle $OABC$. Le compteur C dénombre parmi ces N points ceux qui sont dans le domaine $\mathscr{D}$. $F = \dfrac{C}{N}$ est donc la fréquence d'appartenance d'un point au domaine $\mathscr{D}$.

b) iii) Quand N est très grand, la fréquence F obtenue expérimentalement est proche de la probabilité théorique p.

c) La fréquence est $F = \dfrac{441\ 138}{1\ 000\ 000} = 0,441\ 138$. Donc, $0,440\ 138 \leqslant p \leqslant 0,442\ 138$ puis

$$0,880\ 276 \leqslant 2p \leqslant 0,884276$$

et en particulier, $0,88 \leqslant 2p \leqslant 0,89$. Puisque $u_2 = 2p$, une valeur approchée par défaut de u_2 à 10^{-2} près est $0,88$.

Partie B

1) Soit x un réel de $[0, 2]$. $A(x) = ON \times OP = xe^{-x^2}$.

2) La fonction A est dérivable sur $[0, 2]$ et pour $x \in [0, 2]$,

$$A'(x) = 1 \times e^{-x^2} + x \times (-2x)e^{-x^2} = \left(1 - 2x^2\right)e^{-x^2} = \left(1 - x\sqrt{2}\right)\left(1 + x\sqrt{2}\right)e^{-x^2}.$$

Pour tout réel x de $[0, 2]$, $\left(1 + x\sqrt{2}\right)e^{-x^2} > 0$ et donc $A'(x)$ est du signe de $1 - x\sqrt{2}$. En tenant compte du fait que $0 < \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 2$, on en déduit que la fonction A' est strictement positive sur $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right[$, strictement négative sur $\left]\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 2\right]$ et s'annule en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On en déduit encore que la fonction A est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$. Finalement, la fonction A admet un maximum en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et ce maximum est

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}.$$

Le point M de $\mathscr{C}_f$ pour lequel l'aire du rectangle $ONMP$ est maximale est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

3) L'unité d'aire est 1m^2. L'aire à peindre en bleu est l'aire maximale de $ONMP$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$. L'aire à peindre en blanc est $u_2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$.

La calculatrice fournit $0,428 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \leqslant 0,429$ et donc une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire à peindre en bleu est $0,42$ m^2. D'autre part, $0,880 \leqslant u_2 \leqslant 0,885$ et donc

$$0,880 - 0,429 \leqslant u_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \leqslant 0,885 - 0,428$$

ou encore $0,451 \leqslant u_2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \leqslant 0,457$. Une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire à peindre en bleu est $0,45$ m^2.

EXERCICE 2

1) Le discriminant de l'équation proposée est $\Delta = 2^2 - 4(-1)(-2) = -4 < 0$. L'équation proposée admet deux solutions non réelles conjuguées :

$$z_1 = \frac{-2+2i}{2(-1)} = 1 - i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 1 + i.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. $z' = 2 \Leftrightarrow -z^2 + 2z = 2 \Leftrightarrow -z^2 + 2z - 2 = 0 \Leftrightarrow z \in \{1+i, 1-i\}$. Les points du plan dont l'image est le point d'affixe 2 sont les points d'affixes respectives $1+i$ et $1-i$.

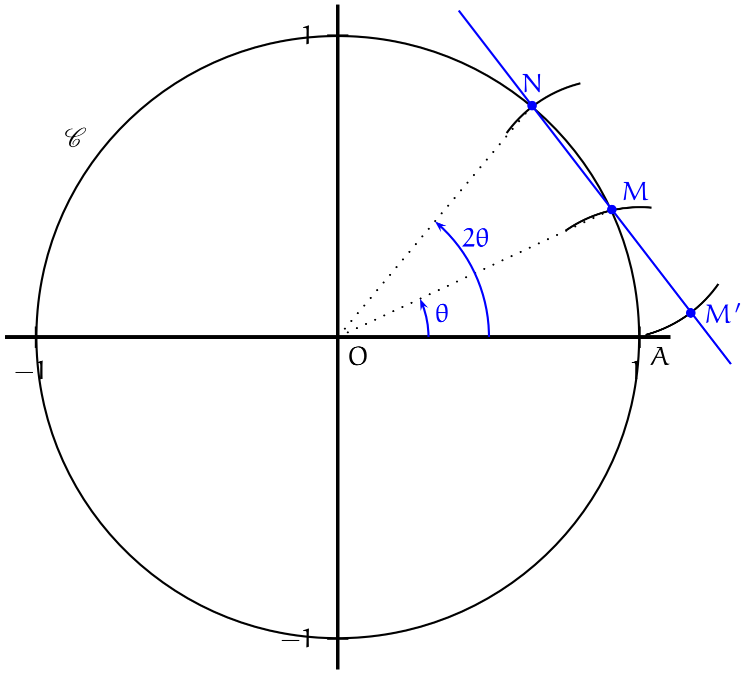
2)

$$\frac{z_N + z_{M'}}{2} = \frac{z^2 + (-z^2 + 2z)}{2} = z = z_M.$$

Donc, le point M est le milieu du segment $[NM']$.

3) a) $|z| = OM = 1$. Donc, z est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ. On en déduit que $z = e^{i\theta}$. Mais alors, $z_N = z^2 = e^{2i\theta}$ et donc un argument de z_N est 2θ.

b) Construction. On plante le compas en A avec une ouverture AM. On reporte ensuite au compas l'arc $\widehat{AM}$ pour obtenir le point N. On trace la droite (NM). On reporte le distance NM au compas à partir de M sur la droite (NM) et on obtient le point M'.



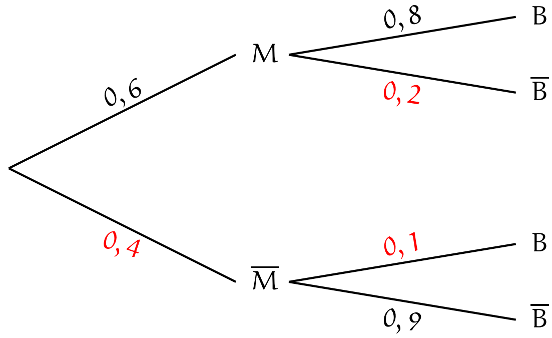
c) $MA = MN = MM'$ et donc le triangle AMM' est isocèle en M.

EXERCICE 3

1) a) La calculatrice fournit $P(1,04 \leqslant T \leqslant 2,64) = 0,954$ arrondi au millième. On note que la probabilité demandée est $P(\mu - 2\sigma \leqslant T \leqslant \mu + 2\sigma)$ et donc que cette probabilité est fournie dans le cours (à 10^{-2} près en général).

b) La calculatrice fournit $P(T \geqslant 1,2) = 0,945$ arrondi au millième.

2) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap M) + P\left(B \cap \overline{M}\right) = P(M) \times P_M(B) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(B) \\ &= 0,6 \times 0,8 + 0,4 \times 0,1 = 0,48 + 0,04 = 0,52. \end{aligned}$$

La probabilité que le taux de cholestérol baisse est $0,52$.

c) La probabilité demandée est $P_B(M)$.

$$P_B(M) = \frac{P(B \cap M)}{P(B)} = \frac{P(M) \times P_M(B)}{P(B)} = \frac{0,6 \times 0,8}{0,52} = \frac{12}{13} = 0,923 \text{ arrondi au millième.}$$

3) a) Ici, $n = 100$ et on veut tester l'hypothèse $p = 0,3$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 30 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 70 \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,3 - 1,96\sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{100}}, 0,3 + 1,96\sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{100}}\right] = [0,210; 0,390]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

b) La fréquence observée est $f = \dfrac{37}{100} = 0,37$. Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation. On ne peut donc pas rejeter l'hypothèse $p = 0,3$ au seuil 95%.

c) Notons n l'effectif de l'échantillon. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,37 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, 0,37 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

$$\begin{aligned} 0,3 \notin \left[0,37 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 0,37 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] &\Leftrightarrow 0,3 < 0,37 - \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ (car } 0,37 + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 0,3) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < 0,07 \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{0,07} \Leftrightarrow n > \frac{1}{0,07^2} \\ &\Leftrightarrow n > 204,08\ldots \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 205 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

L'effectif minimal de l'échantillon est 205.

EXERCICE 4.

Partie A

1) On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

$$P=(ABC)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}ax_A+by_A+cz_A=73\\ax_B+by_B+cz_B=73\\ax_C+by_C+cz_C=73\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a+5b-2c=73\\7a-b+3c=73\\-2a+7b-2c=73\end{array}\right.$$
$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&5&-2\\7&-1&3\\-2&7&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}73\\73\\73\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow MX=73Y.$$

2) Les résultats obtenus à la calculatrice fournissent $MN=NM=73I_3$ ou encore $M\left(\dfrac{1}{73}N\right)=\left(\dfrac{1}{73}N\right)M=I_3$. Donc, M est inversible et $M^{-1}=\dfrac{1}{73}N$.

3) $MX=73Y\Rightarrow M^{-1}MX=73M^{-1}Y\Rightarrow X=NY$. Donc,

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19&4&-13\\-8&6&17\\-47&17&36\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19+4-13\\-8+6+17\\-47+17+36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\15\\6\end{pmatrix}.$$

Ainsi, P est nécessairement le plan d'équation $10x+15y+6z=73$. Réciproquement, après vérification de l'appartenance des points A, B et C à ce plan, le plan d'équation $10x+15y+6z=73$ est effectivement le plan (ABC).

Partie B

1) a) Soit $M(x,y,3)$ un point du plan d'équation $z=3$ à coordonnées entières.

$$M\in P\Leftrightarrow 10x+15y+6\times 3=73\Leftrightarrow 10x+15y=55\Leftrightarrow 2x+3y=11.$$

b) $2\times 7+3\times(-1)=14-3=11$. Donc, le couple $(x_0,y_0)=(7,-1)$ est une solution particulière de l'équation (E). Soit (x,y) un couple d'entiers relatifs.

$$2x+3y=11\Leftrightarrow 2x+3y=2x_0+3y_0\Leftrightarrow 2(x-x_0)=3(y_0-y)\quad(*).$$

Si le couple (x,y) est un couple d'entiers relatifs solution de $(*)$. Alors, nécessairement 3 divise $2(x-x_0)$. Puisque les entiers 2 et 3 sont premiers entre eux (nombres premiers distincts), d'après le théorème de Gauss, 3 divise $x-x_0$ et donc il existe un entier relatif k tel que $x-x_0=3k$ ou encore $x=x_0+3k$.
De même, l'entier 2 divise y_0-y et donc il existe un entier k' tel que $y_0-y=2k'$ ou encore $y=y_0-2k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $x=x_0+3k$ et $y=y_0-2k'$.

$$(x,y)\text{ solution de }(E)\Leftrightarrow 2(x-x_0)=3(y_0-y)\Leftrightarrow 2\times 3k=3\times 2k'\Leftrightarrow k=k'.$$

Les couples d'entiers relatifs solutions de (E) sont les couples de la forme $(7+3k,-1-2k)$ où k est un entier relatif.

c) Soit k un entier relatif. $7+3k\geqslant 0\Leftrightarrow k\geqslant -\dfrac{7}{3}\Leftrightarrow k\geqslant -2$ et $-1-2k\geqslant 0\Leftrightarrow -1\geqslant 2k\Leftrightarrow k\leqslant -\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow k\leqslant -1$.
En résumé, pour k entier relatif, $7+3k$ et $-1-2k$ sont dans $\mathbb{N}$ si et seulement si $-2\leqslant k\leqslant -1$. Ceci fournit exactement deux points, les points de coordonnées $(1,3,3)$ et $(4,1,3)$.

Il existe exactement deux points appartenant au plan P et au plan d'équation $z=3$, dont les coordonnées sont des entiers naturels : les points de coordonnées $(1,3,3)$ et $(4,1,3)$.

2) a) Soient x, y et z trois entiers naturels.

$$10x+15y+6z=73\Rightarrow 0\times x+1\times y+0\times z\equiv 1\ [2]\Rightarrow y\equiv 1\ [2]\Rightarrow y\text{ impair}.$$

b) Soient x, y et z trois entiers naturels. Puisque $10=3\times 3+1$, $15=3\times 5$, $6=3\times 2$ et $73=3\times 24+1$,

$$10x+15y+6z=73\Rightarrow 1\times x+0\times y+0\times z\equiv 1\ [3]\Rightarrow x\equiv 1\ [3].$$

c)

$$M\in P\Leftrightarrow 10(1+3p)+15(1+2q)+6(3+5r)=73\Leftrightarrow 30p+30q+30r=30\Leftrightarrow p+q+r=1.$$

d) Puisque p, q et r sont des entiers naturels, $p+q+r=1$ équivaut à $(p,q,r)=(1,0,0)$ ou $(p,q,r)=(0,1,0)$ ou $(p,q,r)=(0,0,1)$.
Quand $(p,q,r)=(1,0,0)$, on obtient le point de coordonnées $(4,1,3)$, quand $(p,q,r)=(0,1,0)$, on obtient le point de coordonnées $(1,3,3)$ et quand $(p,q,r)=(0,0,1)$, on obtient le point de coordonnées $(1,1,8)$.

Il existe exactement trois points du plan P dont les coordonnées sont des nombres entiers naturels : les points de coordonnées respectives $(4,1,3)$, $(1,1,3)$ et $(1,1,8)$.

