

France métropolitaine. Septembre 2017.

Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) a) Soit n un entier naturel. D'après la relation de CHASLES

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} e^{-x^2} dx - \int_0^n e^{-x^2} dx = \int_n^{n+1} e^{-x^2} dx + \int_0^n e^{-x^2} dx = \int_n^{n+1} e^{-x^2} dx.$$

Pour tout réel x de $[n, n+1]$, $e^{-x^2} \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_n^{n+1} e^{-x^2} dx \geq 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

b) Soit x un réel. $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ et donc $0 \leq x^2 - 2x + 1$ puis $-x^2 \leq -2x + 1$. Par croissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} , on en déduit que $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$.

Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[0, n]$, on a $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^n e^{-x^2} dx \leq \int_0^n e^{-2x+1} dx$. Ensuite,

$$\int_0^n e^{-2x+1} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x+1} \right]_0^n = \left(-\frac{1}{2} e^{-2n+1} \right) - \left(-\frac{1}{2} e^{0+1} \right) = \frac{e}{2} - \frac{e^{-2n+1}}{2}.$$

Puisque $\frac{e^{-2n+1}}{2}$, on en déduit que $\int_0^n e^{-x^2} dx \leq \int_0^n e^{-2x+1} dx < \frac{e}{2}$ et finalement, $u_n < \frac{e}{2}$.

On a montré que pour tout entier naturel n , $u_n < \frac{e}{2}$.

c) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante d'après a), et majorée (par $\frac{e}{2}$) d'après b). On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

2) a) La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est positive sur $[0, 2]$. Donc, u_2 est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine \mathcal{D} . L'aire, exprimée en unités d'aire, de OABC est égale à $OA \times OC$ c'est-à-dire 2. Donc,

$$u_2 = \text{aire de } \mathcal{D} = p \times \text{aire de OABC} = 2p.$$

b) i) La condition de la ligne L8 est vérifiée si et seulement si le point $M(X, Y)$ appartient au domaine \mathcal{D} .

b) ii) L'algorithme génère N points aléatoires de coordonnées (X, Y) à l'intérieur du rectangle OABC. Le compteur C dénombre parmi ces N points ceux qui sont dans le domaine \mathcal{D} . $F = \frac{C}{N}$ est donc la fréquence d'appartenance d'un point au domaine \mathcal{D} .

b) iii) Quand N est très grand, la fréquence F obtenue expérimentalement est proche de la probabilité théorique p .

c) La fréquence est $F = \frac{441\,138}{1\,000\,000} = 0,441\,138$. Donc, $0,440\,138 \leq p \leq 0,442\,138$ puis

$$0,880\,276 \leq 2p \leq 0,884\,276$$

et en particulier, $0,88 \leq 2p \leq 0,89$. Puisque $u_2 = 2p$, une valeur approchée par défaut de u_2 à 10^{-2} près est 0,88.

Partie B

1) Soit x un réel de $[0, 2]$. $A(x) = ON \times OP = xe^{-x^2}$.

2) La fonction A est dérivable sur $[0, 2]$ et pour $x \in [0, 2]$,

$$A'(x) = 1 \times e^{-x^2} + x \times (-2x)e^{-x^2} = (1 - 2x^2) e^{-x^2} = (1 - x\sqrt{2}) (1 + x\sqrt{2}) e^{-x^2}.$$

Pour tout réel x de $[0, 2]$, $(1 + x\sqrt{2}) e^{-x^2} > 0$ et donc $A'(x)$ est du signe de $1 - x\sqrt{2}$. En tenant compte du fait que

$0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2$, on en déduit que la fonction A' est strictement positive sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, strictement négative sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right]$

et s'annule en $\frac{1}{\sqrt{2}}$. On en déduit encore que la fonction A est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right]$. Finalement, la fonction A admet un maximum en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et ce maximum est

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}}.$$

Le point M de \mathcal{C}_f pour lequel l'aire du rectangle ONMP est maximale est le point de \mathcal{C}_f d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3) L'unité d'aire est 1m^2 . L'aire à peindre en bleu est l'aire maximale de ONMP c'est-à-dire $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$. L'aire à peindre en blanc est $u_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$.

La calculatrice fournit $0,428 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \leq 0,429$ et donc une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire à peindre en bleu est $0,42 \text{ m}^2$. D'autre part, $0,880 \leq u_2 \leq 0,885$ et donc

$$0,880 - 0,429 \leq u_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \leq 0,885 - 0,428$$

ou encore $0,451 \leq u_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} \leq 0,457$. Une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire à peindre en bleu est $0,45 \text{ m}^2$.

EXERCICE 2

1) Le discriminant de l'équation proposée est $\Delta = 2^2 - 4(-1)(-2) = -4 < 0$. L'équation proposée admet deux solutions non réelles conjuguées :

$$z_1 = \frac{-2 + 2i}{2(-1)} = 1 - i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 1 + i.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. $z' = 2 \Leftrightarrow -z^2 + 2z = 2 \Leftrightarrow -z^2 + 2z - 2 = 0 \Leftrightarrow z \in \{1 + i, 1 - i\}$. Les points du plan dont l'image est le point d'affixe 2 sont les points d'affixes respectives $1 + i$ et $1 - i$.

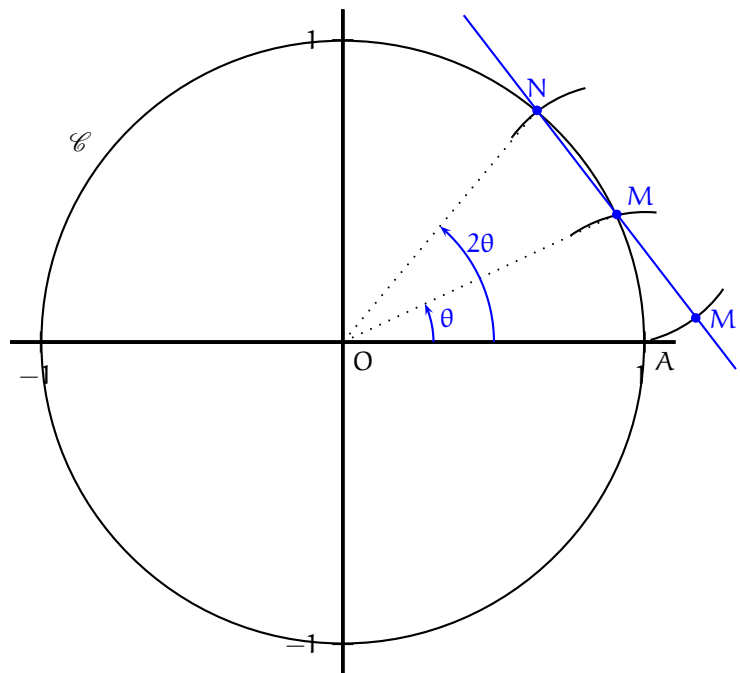
2)

$$\frac{z_N + z_{M'}}{2} = \frac{z^2 + (-z^2 + 2z)}{2} = z = z_M.$$

Donc, le point M est le milieu du segment $[NM']$.

3) a) $|z| = OM = 1$. Donc, z est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ . On en déduit que $z = e^{i\theta}$. Mais alors, $z_N = z^2 = e^{2i\theta}$ et donc un argument de z_N est 2θ .

b) Construction. On plante le compas en A avec une ouverture AM. On reporte ensuite au compas l'arc \widehat{AM} pour obtenir le point N. On trace la droite (NM). On reporte le distance NM au compas à partir de M sur la droite (NM) et on obtient le point M'.



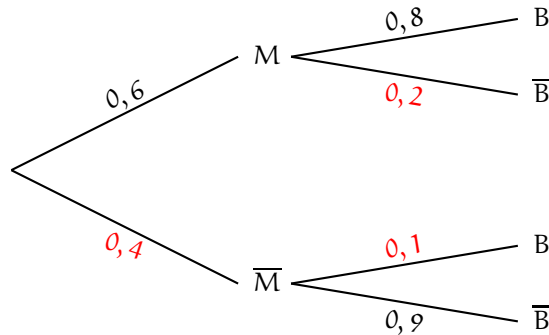
c) $MA = MN = MM'$ et donc le triangle AMM' est isocèle en M.

EXERCICE 3

1) a) La calculatrice fournit $P(1,04 \leq T \leq 2,64) = 0,954$ arrondi au millième. On note que la probabilité demandée est $P(\mu - 2\sigma \leq T \leq \mu + 2\sigma)$ et donc que cette probabilité est fournie dans le cours (à 10^{-2} près en général).

b) La calculatrice fournit $P(T \geq 1,2) = 0,945$ arrondi au millième.

2) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) D'après la formule des probabilités totales,

$$P(B) = P(M) \times P_M(B) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(B) = 0,6 \times 0,8 + 0,4 \times 0,1 = 0,48 + 0,04 = 0,52.$$

La probabilité que le taux de cholestérol baisse est 0,52.

c) La probabilité demandée est $P_B(M)$.

$$P_B(M) = \frac{P(B \cap M)}{P(B)} = \frac{P(M) \times P_M(B)}{P(B)} = \frac{0,6 \times 0,8}{0,52} = \frac{12}{13} = 0,923 \text{ arrondi au millième.}$$

3) a) Ici, $n = 100$ et on veut tester l'hypothèse $p = 0,3$. On note que $n \geq 30$, $np = 30 \geq 5$ et $n(1-p) = 70 \geq 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] = \left[0,3 - 1,96\sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{100}}, 0,3 + 1,96\sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{100}} \right] = [0,210; 0,390]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

b) La fréquence observée est $f = \frac{37}{100} = 0,37$. Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation. On ne peut donc pas rejeter l'hypothèse $p = 0,3$ au seuil 95%.

c) Notons n l'effectif de l'échantillon. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,37 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 0,37 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.

$$\begin{aligned} 0,3 \notin \left[0,37 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 0,37 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] &\Leftrightarrow 0,3 < 0,37 - \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ (car } 0,37 + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0,3) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < 0,07 \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{0,07} \Leftrightarrow n > \frac{1}{0,07^2} \\ &\Leftrightarrow n > 204,08\dots \\ &\Leftrightarrow n \geq 205 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

L'effectif minimal de l'échantillon est 205.

EXERCICE 4.

Partie A

1) On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

$$\begin{aligned} P = (ABC) &\Rightarrow \begin{cases} ax_A + by_A + cz_A = 73 \\ ax_B + by_B + cz_B = 73 \\ ax_C + by_C + cz_C = 73 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 5b - 2c = 73 \\ 7a - b + 3c = 73 \\ -2a + 7b - 2c = 73 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ 73 \\ 73 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow MX = 73Y. \end{aligned}$$

2) Les résultats obtenus à la calculatrice fournissent $MN = nM = 73I_3$ ou encore $M \left(\frac{1}{73}N \right) = \left(\frac{1}{73}N \right) M = I_3$.

Donc, M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{73}N$.

3) $MX = 73Y \Rightarrow M^{-1}MX = 73M^{-1}Y \Rightarrow X = NY$. Donc,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 4 & -13 \\ -8 & 6 & 17 \\ -47 & 17 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 + 4 - 13 \\ -8 + 6 + 17 \\ -47 + 17 + 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, P est nécessairement le plan d'équation $10x + 15y + 6z = 73$. Réciproquement, après vérification de l'appartenance des points A, B et C à ce plan, le plan d'équation $10x + 15y + 6z = 73$ est effectivement le plan (ABC).

Partie B

1) a) Soit $M(x, y, 3)$ un point du plan d'équation $z = 3$ à coordonnées entières.

$$M \in P \Leftrightarrow 10x + 15y + 6 \times 3 = 73 \Leftrightarrow 10x + 15y = 55 \Leftrightarrow 2x + 3y = 11.$$

b) $2 \times 7 + 3 \times (-1) = 14 - 3 = 11$. Donc, le couple $(x_0, y_0) = (7, -1)$ est une solution particulière de l'équation (E). Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs.

$$2x + 3y = 11 \Leftrightarrow 2x + 3y = 2x_0 + 3y_0 \Leftrightarrow 2(x - x_0) = 3(y_0 - y) \quad (*).$$

Si le couple (x, y) est un couple d'entiers relatifs solution de (*). Alors, nécessairement 3 divise $2(x - x_0)$. Puisque les entiers 2 et 3 sont premiers entre eux (nombres premiers distincts), d'après le théorème de GAUSS, 3 divise $x - x_0$ et donc il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 3k$ ou encore $x = x_0 + 3k$.

De même, l'entier 2 divise $y_0 - y$ et donc il existe un entier k' tel que $y_0 - y = 2k'$ ou encore $y = y_0 - 2k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $x = x_0 + 3k$ et $y = y_0 - 2k'$.

$$(x, y) \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow 2(x - x_0) = 3(y_0 - y) \Leftrightarrow 2 \times 3k = 3 \times 2k' \Leftrightarrow k = k'.$$

Les couples d'entiers relatifs solutions de (E) sont les couples de la forme $(7 + 3k, -1 - 2k)$ où k est un entier relatif.

c) Soit k un entier relatif. $7 + 3k \geq 0 \Leftrightarrow k \geq -\frac{7}{3} \Leftrightarrow k \geq -2$ et $-1 - 2k \geq 0 \Leftrightarrow -1 \geq 2k \Leftrightarrow k \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k \leq -1$.

En résumé, pour k entier relatif, $7 + 3k$ et $-1 - 2k$ sont dans \mathbb{N} si et seulement si $-2 \leq k \leq -1$. Ceci fournit exactement deux points, les points de coordonnées $(1, 3, 3)$ et $(4, 1, 3)$.

Il existe exactement deux points appartenant au plan P et au plan d'équation $z = 3$, dont les coordonnées sont des entiers naturels : les points de coordonnées $(1, 3, 3)$ et $(4, 1, 3)$.

2) a) Soient x, y et z trois entiers naturels.

$$10x + 15y + 6z = 73 \Rightarrow 0 \times x + 1 \times y + 0 \times z \equiv 1 [2] \Rightarrow y \equiv 1 [2] \Rightarrow y \text{ impair.}$$

b) Soient x, y et z trois entiers naturels. Puisque $10 = 3 \times 3 + 1$, $15 = 3 \times 5$, $6 = 3 \times 2$ et $73 = 3 \times 24 + 1$,

$$10x + 15y + 6z = 73 \Rightarrow 1 \times x + 0 \times y + 0 \times z \equiv 1 [3] \Rightarrow x \equiv 1 [3].$$

c)

$$M \in P \Leftrightarrow 10(1 + 3p) + 15(1 + 2q) + 6(3 + 5r) = 73 \Leftrightarrow 30p + 30q + 30r = 30 \Leftrightarrow p + q + r = 1.$$

d) Puisque p , q et r sont des entiers naturels, $p + q + r = 1$ équivaut à $(p, q, r) = (1, 0, 0)$ ou $(p, q, r) = (0, 1, 0)$ ou $(p, q, r) = (0, 0, 1)$.

Quand $(p, q, r) = (1, 0, 0)$, on obtient le point de coordonnées $(4, 1, 3)$, quand $(p, q, r) = (0, 1, 0)$, on obtient le point de coordonnées $(1, 3, 3)$ et quand $(p, q, r) = (0, 0, 1)$, on obtient le point de coordonnées $(1, 1, 8)$.

Il existe exactement trois points du plan P dont les coordonnées sont des nombres entiers naturels : les points de coordonnées respectives $(4, 1, 3)$, $(1, 1, 3)$ et $(1, 1, 8)$.