

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

EXERCICE 1 (7 points)

(Commun à tous les candidats)

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Romane utilise deux modes de déplacement pour se déplacer entre son domicile et son lieu de travail : le vélo ou les transports en commun.

Partie A

Lorsque la journée est ensoleillée, Romane se déplace en vélo 9 fois sur 10.

Lorsque la journée n'est pas ensoleillée, Romane se déplace en vélo 6 fois sur 10.

La probabilité qu'une journée soit ensoleillée, dans la ville où habite Romane, est notée p .

Pour une journée donnée, on note :

- E l'évènement « La journée est ensoleillée » ;
- V l'évènement « Romane se déplace en vélo ».

1) Construire l'arbre pondéré représentant la situation.

2) Montrer que la probabilité que Romane se déplace en vélo lors d'une journée donnée est

$$P(V) = 0,3p + 0,6.$$

3) On constate que dans 67,5 % des cas, c'est en vélo que Romane se déplace entre son domicile et son lieu de travail.

a) Calculer la valeur de p .

b) Sachant que Romane s'est déplacée en vélo, montrer que la probabilité que la journée soit ensoleillée est $\frac{1}{3}$.

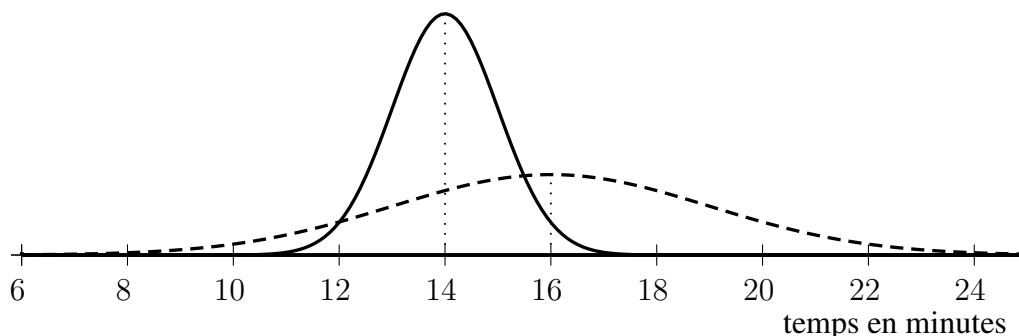
Partie B

Lorsque Romane se déplace en vélo, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, entre son domicile et son lieu de travail par une variable aléatoire T_V suivant une loi normale d'espérance μ_V et d'écart-type 1 minute.

Lorsqu'elle effectue ce trajet en transports en commun, on modélise son temps de trajet, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T_C suivant une loi normale d'espérance μ_C et d'écart-type 3 minutes.

1) On nomme \mathcal{C}_C et \mathcal{C}_V les courbes représentatives des fonctions de densité des variables aléatoires T_V et T_C représentées dans la figure ci-dessous.

Déterminer, en justifiant votre réponse, μ_V et μ_C .



- 2) Calculer la probabilité que pour Romane un trajet domicile-travail en vélo dure entre 10 et 15 minutes. Arrondir la réponse à 10^{-4} .
- 3) Quel mode de déplacement Romane doit-elle privilégier si elle souhaite mettre moins de 15 minutes pour se rendre au travail ?

Partie C

En hiver, Romane roule en vélo de nuit. Son vélo est visible grâce à une ampoule dont la durée de fonctionnement en heures peut être modélisée par une variable aléatoire, notée X , suivant une loi exponentielle de paramètre λ , réel strictement positif.

La fonction de densité associée est donc la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

- 1) Soit b un réel positif. Démontrer, à l'aide d'une intégrale, que

$$P(X \leq b) = 1 - e^{-\lambda b}.$$

- 2) On sait que la probabilité que l'ampoule fonctionne encore après 50 heures d'utilisation est 0,9.
 - a) En déduire la valeur exacte de λ .
 - b) Calculer la probabilité que la durée de fonctionnement de l'ampoule soit supérieure à 250 heures sachant que l'ampoule a déjà fonctionné 200 heures.

EXERCICE 2 (3 points)

(commun à tous les candidats)

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie par

$$\begin{cases} z_0 = 100 \\ z_{n+1} = \frac{i}{3}z_n \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Pour tout entier naturel n , on note M_n le point d'affixe z_n .

- 1) Démontrer que, pour tout entier naturel n , les points O , M_n et M_{n+2} sont alignés.
- 2) On rappelle qu'un disque de centre A et de rayon r , où r est un nombre réel positif, est l'ensemble des points M du plan tels que $AM \leq r$.
Démontrer que, à partir d'un certain rang, tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Partie A

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[1 ; +\infty[$ telle que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1,

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln(x).$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

- 1) Démontrer que la courbe \mathcal{C} admet une asymptote horizontale.
- 2) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f sur $[1 ; +\infty[$.
- 3) Étudier les variations de la fonction f sur $[1 ; +\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) dx \text{ pour tout entier naturel } n.$$

- 1) Démontrer que $u_0 = \frac{1}{2} [\ln(2)]^2$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

- 2) Prouver que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1 ; 2]$, on a

$$0 \leq \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) \leq \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2).$$

- 3) En déduire que, pour tout entier naturel n , on a

$$0 \leq u_n \leq \frac{\ln(2)}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

- 4) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 4 (5 points)

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

1) Soit p un entier relatif donné. On s'intéresse dans cette question à l'équation (E_p)

$$3x + 4y = p$$

où $(x ; y)$ est un couple d'entiers relatifs.

a) Vérifier que le couple $(-p ; p)$ est une solution particulière de l'équation.

b) Démontrer que l'ensemble des solutions de (E_p) est l'ensemble des couples de la forme

$$(-p + 4k ; p - 3k) \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

Dans la suite de l'exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère le plan P d'équation cartésienne

$$6x + 8y - z = 0.$$

2) Soit M_0 un point de coordonnées $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ qui appartient au plan P et dont les trois coordonnées sont des entiers relatifs.

a) Démontrer que z_0 est pair.

b) On pose $z_0 = 2p$ où p est un entier relatif.

Prouver que le couple $(x_0 ; y_0)$ est solution de l'équation (E_p) .

c) En utilisant la question 1), déterminer l'ensemble des points du plan P à coordonnées entières.

3) À tout point M de coordonnées $(x ; y ; z)$, on associe le point M' de coordonnées $(x' ; y' ; z')$ avec

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 75 & 180 \\ 56 & 41 & -144 \\ 28 & -30 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que $6x' + 8y' - z' = 101(6x + 8y - z)$.

b) En déduire que si le point M est un point du plan P , alors le point M' est aussi un point du plan P .

c) Soit Δ la droite perpendiculaire à P passant par O .

Montrer que si le point M appartient à Δ , alors le point M' appartient aussi à Δ .