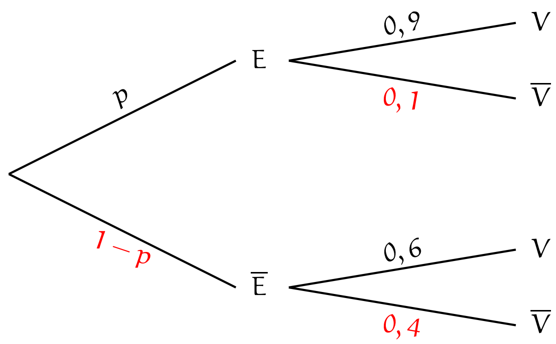
Antilles Guyane. Septembre 2017.
Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



2) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(V) &= P(E \cap V) + P\left(\overline{E} \cap V\right) \\ &= P(E) \times P_E(V) + P\left(\overline{E}\right) \times P_{\overline{E}}(V) = p \times 0,9 + (1-p) \times 0,6 = 0,3p + 0,6. \end{aligned}$$

3) a) L'énoncé donné $P(V) = 0,675$.

$$0,3p + 0,6 = 0,675 \Leftrightarrow 0,3p = 0,075 \Leftrightarrow p = \frac{0,075}{0,3} \Leftrightarrow p = \frac{0,75}{3} \Leftrightarrow p = 0,25.$$

b) La probabilité demandée est $P_V(E)$.

$$P_V(E) = \frac{P(E \cap V)}{P(V)} = \frac{P(E) \times P_E(V)}{P(V)} = \frac{0,25 \times 0,9}{0,3 \times 0,25 + 0,6} = \frac{0,225}{0,675} = \frac{1}{3}.$$

La probabilité que la journée soit ensoleillée sachant que Romane s'est déplacée en vélo est $\frac{1}{3}$.

Partie B

1) $\sigma_V < \sigma_C$. Donc, la courbe en trait plein, qui est plus resserée que la courbe en pointillés, est la courbe représentative de la fonction de densité de la variable T_V. μ_V est l'abscisse du sommet de cette courbe et donc $\mu_V = 14$ puis $\mu_C = 16$.

2) La probabilité demandée est $P\left(10 \leqslant T_V \leqslant 15\right)$. La calculatrice fournit $P\left(10 \leqslant T_V \leqslant 15\right) = 0,841\ 3$ arrondi à 10^{-4}.

3) La calculatrice fournit $P\left(T_V \leqslant 15\right) = 0,841\ 3$ arrondi à 10^{-4} et $P\left(T_C \leqslant 15\right) = 0,3694\ldots$ arrondi à 10^{-4}. Pour maximiser les chances d'avoir un temps de trajet d'au maximum 15 minutes, Romane doit choisir le vélo.

Partie C

1)

$$P(X \leqslant b) = \int_0^b \lambda e^{-\lambda t}\, dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^b = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda b},$$

et donc aussi $P(X \geqslant b) = P(X > b) = 1 - P(X \leqslant b) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda b}\right) = e^{-\lambda b}$.

2) a) L'énoncé donne $P(X > 50) = 0,9$.

$$P(X > 50) = 0,9 \Leftrightarrow e^{-50\lambda} = 0,9 \Leftrightarrow -50\lambda = \ln\left(\frac{9}{10}\right) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{50}\ln\left(\frac{9}{10}\right) \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{50}\ln\left(\frac{10}{9}\right).$$

b) La probabilité demandée est $P_{X \geqslant 200}(X \geqslant 250)$. On sait que la loi exponentielle de paramètre λ est une loi sans vieillissement. Donc,

$$P_{X \geqslant 200}(X \geqslant 250) = P_{X \geqslant 0}(X \geqslant 50) = P(X \geqslant 50) = 0,9.$$

EXERCICE 2

1) Soit n un entier naturel.

$$z_{\overrightarrow{OM_{n+2}}} = z_{n+2} = \frac{i}{3}z_{n+1} = \left(\frac{i}{3}\right)^2 z_n = -\frac{1}{9}z_n = -\frac{1}{9}z_{\overrightarrow{OM_n}}.$$

Mais alors,

$$\overrightarrow{OM_{n+2}} = -\frac{1}{9}\overrightarrow{OM_n}.$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{OM_n}$ et $\overrightarrow{OM_{n+2}}$ sont colinéaires et donc les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. $OM_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\frac{i}{3}z_n\right| = \frac{|i|}{3}|z_n| = \frac{1}{3}OM_n$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (OM_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $u_0 = OM_0 = |z_0| = 100$ et de raison $q = \frac{1}{3}$. On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$OM_n = OM_0 \times q^n = 100\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{100}{3^n}.$$

Puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} OM_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 100\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. En particulier, il existe un rang n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $OM_n \leqslant 1$.
n_0 est un rang à partir duquel tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.

Déterminons explicitement un tel rang. Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} OM_n \leqslant 1 &\Leftrightarrow \frac{100}{3^n} \leqslant 1 \Leftrightarrow 100 \leqslant 3^n \Leftrightarrow 3^n \geqslant 100 \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 5, \end{aligned}$$

car $3^4 < 100$, $3^5 \geqslant 100$ et car la suite $(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

A partir du rang $n_0 = 5$, tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 3

Partie A

1) D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. Donc, la courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des abscisses pour droite asymptote en $+\infty$.

2) La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[1,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1,+\infty[$ et pour $x \geqslant 1$,

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{x}\times x - \ln(x)\times 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

3) Pour $x \geqslant 1$, $x^2 > 0$. Donc, pour $x \geqslant 1$, $f'(x)$ est du signe de $1-\ln(x)$. Or, $1-\ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \Leftrightarrow x < e$ et de même, $1-\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$ et $1-\ln(x) < 0 \Leftrightarrow x > e$.
La fonction f' est strictement positive sur $[1,e[$, strictement négative sur $]e,+\infty[$ et s'annule en e. On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[1,e]$ et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$.

Partie B

1) $u_0 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\times\ln x\ dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2 = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$. Pour $x \geqslant 1$, $\ln x \geqslant 0$ et donc la fonction $f\ :\ x\mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ est positive sur $[1,2]$. On en déduit que u_0 est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$ d'autre part.

2) Soit n un entier naturel. Soit $x \in [1,2]$. Donc, $0 < 1 \leqslant x \leqslant 2$ puis $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(2)$ par croissance de la fonction $t \mapsto \ln(t)$ sur $]0,+\infty[$. En multipliant les deux membres de cette inégalité par le réel positif $\dfrac{1}{x^{n+1}}$, on obtient

$$0 \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(2).$$

3) (erreur d'énoncé : remplacer « pour tout entier naturel n » par « pour tout entier naturel non nul n »). Soit n un entier naturel non nul. Par positivité et croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\ dx \leqslant \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln(2)\ dx.$$

Or, $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln(2)\ dx = \ln(2)\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ dx = \ln(2)\left[-\frac{1}{nx^n}\right]_1^2 = \ln(2)\left(\left(-\frac{1}{n2^n}\right) - \left(-\frac{1}{n1^n}\right)\right) = \frac{\ln(2)}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

On a montré que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln(2)}{n}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$.

4) Puisque pour tout entier naturel non nul n, $1-\dfrac{1}{2^n} \leqslant 1$ et $\dfrac{\ln(2)}{n} \geqslant 0$, on en déduit encore que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln(2)}{n}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(2)}{n} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

EXERCICE 4.

1) a) Le couple $(-p, p)$ est un couple d'entiers relatifs et

$$3(-p) + 4p = p.$$

Donc, le couple $(x_0, y_0) = (-p, p)$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E_p).

b) Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs.

$$(x, y) \text{ solution de } (E_p) \Leftrightarrow 3x + 4y = p \Leftrightarrow 3x + 4y = 3x_0 + 4y_0 \Leftrightarrow 3(x - x_0) = 4(y_0 - y).$$

Si (x, y) est solution de (E_p), nécessairement l'entier 4 divise l'entier $3(x - x_0)$. Puisque les entiers 3 et 4 sont premiers entre eux (car sans facteur premier commun), le théorème de Gauss permet d'affirmer que l'entier 4 divise $x - x_0$. Par suite, il existe nécessairement un entier relatif k tel que $x - x_0 = 4k$ ou encore tel que $x = x_0 + 4k$. De même, l'entier 3 divise nécessairement l'entier $y_0 - y$ et il existe un entier relatif k' tel que $y_0 - y = 3k'$ ou encore tel que $y = y_0 - 3k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $x = x_0 + 4k$ et $y = y_0 - 3k'$.

$$3x + 4y = 3(x_0 + 4k) + 4(y_0 - 3k') = 3x_0 + 4y_0 + 12(k - k') = p + 12(k - k').$$

Donc, $3x + 4y = p \Leftrightarrow p + 12(k - k') = p \Leftrightarrow k = k'$. L'ensemble des solutions de (E_p) est l'ensemble des couples de la forme $(-p + 4k, p - 3k)$ où k est un entier relatif.

2) a) $z_0 = 6x_0 + 8y_0 = 2(3x_0 + 4y_0)$. Puisque $3x_0 + 4y_0$ est un entier relatif, ceci montre que z_0 est pair.

b) $6x_0 + 8y_0 - z_0 = 0 \Leftrightarrow 2(3x_0 + 4y_0) = 2p \Leftrightarrow 3x_0 + 4y_0 = p \Leftrightarrow (x_0, y_0)$ solution de (E_p).

c) D'après la question 1), $6x_0 + 8y_0 - z_0 = 0 \Leftrightarrow$ il existe deux entiers relatifs p et k tels que $z_0 = 2p$ et $x_0 = -p + 4k$ et $y_0 = p - 3k$.
Les points du plan P dont les trois coordonnées sont des entiers relatifs sont les points dont les coordonnées sont de la forme $(-p + 4k, p - 3k, 2p)$ où p et k sont des entiers relatifs.

3) a) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 75 & 180 \\ 56 & 41 & -144 \\ 28 & -30 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31x + 75y + 180z \\ 56x + 41y - 144z \\ 28x - 30y + 29z \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} 6x' + 8y' - z' &= 6(31x + 75y + 180z) + 8(56x + 41y - 144z) - (28x - 30y + 29z) = 606x + 808y - 101z \\ &= 101(6x + 8y - z). \end{aligned}$$

b) $M \in P \Rightarrow 6x + 8y - z = 0 \Rightarrow 101(6x + 8y - z) = 0 \Rightarrow 6x' + 8y' - z' = 0 \Rightarrow M' \in P$.

c) P est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(6, 8, -1)$. Une représentation paramétrique de Δ est donc $\left\{\begin{array}{l} x = 6t \\ y = 8t \\ z = -t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

Soit $M(6t, 8t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ.
Le point M' a pour coordonnées $(31(6t) + 75(8t) + 180(-t), 56(6t) + 41(8t) - 144(-t), 28(6t) - 30(8t) + 29(-t))$ ou encore $(606t, 808t, -101t)$. En posant $t' = 101t$, le point M' a pour coordonnées $(6t', 8t', -t')$ ce qui montre que le point M' appartient à la droite Δ.

