Rochambeau. 2017. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) La probabilité demandée est $P(X \geqslant 4000)$. La calculatrice donne $P(X \geqslant 4000) = 0,189$ arrondi au millième.

2) Soit a le montant minimum d'un devis demandé pour que celui-ci soit pris en compte.
L'énoncé fournit $P(X \leqslant a) = 0,1$. La calculatrice donne $a = 1298$ arrondi à l'euro.

Partie B

1) L'énoncé donne $P_S(D) = 0,95$, $P(S) = 0,6$ et $P(D) = 0,586$.

$$P(S \cap D) = P(S) \times P_S(D) = 0,6 \times 0,95 = 0,57.$$

2) La probabilité demandée est $P_{\overline{S}}(D)$.

$$P_{\overline{S}}(D) = \frac{P(\overline{S} \cap D)}{P(\overline{S})} = \frac{P(D) - P(S \cap D)}{1 - P(S)} = \frac{0,586 - 0,57}{1 - 0,6} = \frac{0,016}{0,4} = 0,04.$$

3) La probabilité demandée est $P_{\overline{D}}(S)$.

$$P_{\overline{D}}(S) = \frac{P(\overline{D} \cap S)}{P(\overline{D})} = \frac{P(S) - P(S \cap D)}{1 - P(D)} = \frac{0,6 - 0,57}{1 - 0,586} = \frac{0,03}{0,414} = 0,072 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

4) Ici, $n = 231$ et on veut tester l'hypothèse $p = 0,027$. On note que $n \geqslant 30$ puis $np = 6,237$ et donc $np \geqslant 5$ puis $n(1-p) = 224,763$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\begin{aligned}\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] &= \left[0,027 - 1,96\sqrt{\frac{0,027 \times 0,973}{231}}, 0,027 + 1,96\sqrt{\frac{0,027 \times 0,973}{231}}\right] \\ &= [0,006; 0,048]\end{aligned}$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \frac{13}{231} = 0,056$ arrondi à 10^{-3}.
La fréquence observée n'est pas dans l'intervalle de fluctuation et on peut donc remettre en cause l'affirmation du fabricant au risque de se tromper de 5%.

EXERCICE 2

Partie A

1) Soit $x \in [-2, 2]$, $f(-x) = -\dfrac{b}{8}\left(e^{-\frac{x}{b}} + e^{\frac{x}{b}}\right) + \dfrac{9}{4} = -\dfrac{b}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right) + \dfrac{9}{4} = f(x)$.

On en déduit que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe représentative de f.

2) f est dérivable sur $[-2, 2]$ et pour tout réel x de $[-2, 2]$,

$$f'(x) = -\frac{b}{8}\left(\left(\frac{1}{b}\right)e^{\frac{x}{b}} + \left(-\frac{1}{b}\right)e^{-\frac{x}{b}}\right) + 0 = -\frac{1}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}}\right).$$

3) Soit $x \in [-2, 2]$. Si $x > 0$, alors $-\dfrac{x}{b} < 0 < \dfrac{x}{b}$ puis $e^{-\frac{x}{b}} < e^{\frac{x}{b}}$ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$) puis $e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}} > 0$ et donc $f'(x) < 0$.

De même, si $x < 0$, alors $\dfrac{x}{b} < 0 < -\dfrac{x}{b}$ puis $f'(x) > 0$. Enfin, $f'(0) = 0$.

D'autre part, $f(0) = -\dfrac{b}{8}\left(e^0 + e^0\right) + \dfrac{9}{4} = -\dfrac{2b}{8} + \dfrac{9}{4} = \dfrac{9}{4} - \dfrac{b}{4}$.

On en déduit le tableau de variations de f :

x	-2		0		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$f(-2)$	$\nearrow$	$\frac{9}{4} - \frac{b}{4}$	$\searrow$	$f(2)$

La fonction f admet un maximum en 0 égal à $\dfrac{9}{4} - \dfrac{b}{4}$ ou encore le point S a pour coordonnées $\left(0, \dfrac{9}{4} - \dfrac{b}{4}\right)$

Partie B

1) $y_S = 2 \Leftrightarrow \dfrac{9}{4} - \dfrac{b}{4} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{b}{4} = \dfrac{9}{4} - 2 \Leftrightarrow \dfrac{b}{4} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow b = 1$. Donc, pour tout réel x de $[-2, 2]$, $f(x) = -\dfrac{1}{8}\left(e^x + e^{-x}\right) + \dfrac{9}{4}$.

2) $f(2) = -\dfrac{1}{8}\left(e^2 + e^{-2}\right) + \dfrac{9}{4} = 1,309\ldots$. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0, 2]$. On en déduit que pour tout réel k de $[f(2), f(0)] = [1,309\ldots; 2]$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[0, 2]$. Puisque $1,5$ est dans l'intervalle $[1,309\ldots; 2]$, l'équation $f(x) = 1,5$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[0, 2]$. Cette solution est α.

La calculatrice fournit $f(1,76) = 1,501\ldots$ et donc $f(1,76) > 1,5$ et $f(1,77) = 1,494\ldots$ et donc $f(1,77) < 1,5$. Ainsi, $f(1,76) > f(\alpha) > f(1,77)$ et donc, puisque f est strictement décroissante sur $[0, 2]$, $1,76 < \alpha < 1,77$.

Une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut est $1,76$.

3) L'unité d'aire est égale à 1 m^2. Puisque la fonction f est continue et positive sur $[0; 1,8]$, l'aire $\mathscr{A}$ d'un vantail, exprimée en m^2, est $\displaystyle\int_0^{1,8} f(x)\,dx$.

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_0^{1,8}\left(-\frac{1}{8}\left(e^x + e^{-x}\right) + \frac{9}{4}\right)dx = \left[-\frac{1}{8}\left(e^x - e^{-x}\right) + \frac{9}{4}x\right]_0^{1,8} \\
&= \left(-\frac{1}{8}\left(e^{1,8} - e^{-1,8}\right) + \frac{9 \times 1,8}{4}\right) - \left(-\frac{1}{8}\left(e^0 - e^0\right) + 0\right) \\
&= 4,05 - 0,125\left(e^{1,8} - e^{-1,8}\right).
\end{aligned}$$

La masse exprimée en kg d'un vantail est donc $m = 20\displaystyle\int_0^{1,8} f(x)\,dx = 81 - 2,5\left(e^{1,8} - e^{-1,8}\right) = 66,2\ldots$. La masse d'un vantail dépasse 60 kg et donc le client décide d'automatiser son portail.

Partie C

L'aire, exprimée en m^2, du rectangle OCES est $2 \times 1,8 = 3,6$.

Une équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point abscisse 1 est $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$. $f(1) = \dfrac{9}{4} - \dfrac{1}{8}\left(e + e^{-1}\right)$ et $f'(1) = -\dfrac{1}{8}\left(e - e^{-1}\right)$.

Quand $x = 0$, on obtient

$$\mathrm{OG} = y_G = f(1) - f'(1) = \frac{9}{4} - \frac{1}{8}\left(e + e^{-1}\right) + \frac{1}{8}\left(e - e^{-1}\right) = \frac{9}{4} - \frac{2e^{-1}}{8} = \frac{9 - e^{-1}}{4}.$$

Quand $x = 1,8$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{CH} = y_H = f(1) + 0,8f'(1) &= \frac{9}{4} - \frac{1}{8}\left(e + e^{-1}\right) - \frac{0,8}{8}\left(e - e^{-1}\right) = \frac{9}{4} - \frac{1}{8}\left(e + e^{-1} + 0,8e - 0,8e^{-1}\right)\\ &= \frac{9}{4} - \frac{1}{8}\left(1,8e + 0,2e^{-1}\right) = \frac{9}{4} - \frac{2}{8}\left(0,9e + 0,1e^{-1}\right) = \frac{9 - 0,9e - 0,1e^{-1}}{4}.\end{aligned}$$

L'aire, exprimée en m^2, du trapèze OCHG est

$$\frac{\mathrm{OG} + \mathrm{CH}}{2} \times \mathrm{OC} = \frac{1,8}{2}\left(\frac{9 - e^{-1}}{4} + \frac{9 - 0,9e - 0,1e^{-1}}{4}\right) = \frac{1,8\left(18 - 0,9e - 1,1e^{-1}\right)}{8} = 3,408\ldots.$$

La forme 2 est effectivement plus avantageuse. L'économie réalisée en termes de surface de bois, exprimée en m^2, est de $3,6 - 3,408\ldots = 0,191\ldots$ soit environ $0,2$ m^2 pour un vantail.

EXERCICE 3

1) $u_0 = 3$. $u_0 + u_1 = u_0u_1$ et donc $3 + u_1 = 3u_1$ puis $u_1 = \dfrac{3}{2}$. $u_0 + u_1 + u_2 = u_0u_1u_2$ et donc $3 + \dfrac{3}{2} + u_2 = \dfrac{9}{2}u_2$ puis $u_2 = \dfrac{9}{7}$.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $s_{n+1} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n = s_n + u_n$. D'autre part,

$$s_n = u_0 + \ldots + u_{n-1} \geqslant u_0 > 1.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $s_n + u_n = s_{n+1} = u_0 \times \ldots \times u_{n-1} \times u_n = s_n \times u_n$ puis $s_nu_n - u_n = s_n$ puis $u_n(s_n - 1) = s_n$. Enfin, d'après la question précédente, $s_n \neq 1$ et finalement $u_n = \dfrac{s_n}{s_n - 1}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n - 1 = \frac{s_n}{s_n - 1} - 1 = \frac{s_n - (s_n - 1)}{s_n - 1} = \frac{1}{s_n - 1}.$$

D'après la question 2)a), $s_n > 1$ et donc $s_n - 1 > 0$. On en déduit que $u_n - 1 > 0$ et donc, $u_n > 1$.

3) a) Algorithme complété.

Entrée	Saisir n Saisir u
Traitement	s prend la valeur u Pour i allant de 1 à n : u prend la valeur $s/(s-1)$ s prend la valeur $s + u$ Fin pour
Sortie	Afficher u

b) Il semble que la suite (u_n) converge vers 1.

4) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $s_n > n$.

- $s_1 = u_0$ et donc $s_1 > 1$. L'inégalité est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $s_n > n$.

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + u_n \text{ (d'après la question 2.a)} \\ &> s_n + 1 \text{ (d'après la question 2.c)} \\ &> n + 1 \text{ (par hypothèse de récurrence).} \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $s_n > n$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n > n$. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = +\infty$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Puisque $s_n \neq 0$, $u_n = \dfrac{s_n}{s_n - 1} = \dfrac{s_n}{s_n} \times \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{s_n}} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{s_n}}$. Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{s_n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{1 - 0} = 1$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.}$$

EXERCICE 4.

1) a) Les plans (UVK) et (EFK) se coupent suivant la droite (KM). La droite (UV) est une droite du plan (UVK) et la droite (EF) est une droite du plan (EFK) et les droites (UV) et (EF) sont parallèles. D'après le théorème du toit, la droite (KM) est parallèle à la droite (UV).

Donc, le segment $[KM]$ est parallèle au segment $[UV]$.

b) Les plans (SOA) et (GCB) sont parallèles. Le plan (UKN) coupe ces deux plans en deux droites parallèles. Ces deux droites sont les droites (UK) et (NP) et donc les droites (UK) et (NP) sont parallèles.
Donc, le segment $[UK]$ est parallèle au segment $[NP]$.

2) a) La droite $\overrightarrow{ES}$ est la droite passant par $E(4;0;2,5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{ES}(-4;0;1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (ES) est $\left\{\begin{array}{l} x = 4-4t \\ y = 0 \\ z = 2,5+t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

Le point K appartient à la droite (ES) et donc il existe un réel t tel que les coordonnées de K soient $(4-4t;0;2,5+t)$.

$$x_K = 1,2 \Leftrightarrow 4-4t = 1,2 \Leftrightarrow 4t = 2,8 \Leftrightarrow t = 0,7.$$

Pour $t = 0,7$, on obtient les coordonnées du point K : $(1,2;0;3,2)$.

b) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{UV}$ sont $(0;8;0)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{UK}$ sont $(1,2;0;-2,8)$.

$$\overrightarrow{UV}.\overrightarrow{n} = 0\times 7 + 8\times 0 + 0\times 3 = 0$$

et

$$\overrightarrow{UK}.\overrightarrow{n} = 1,2\times 7 + 0\times 0 + (-2,8)\times 3 = 8,4-8,4 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{UK}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (UVK). Donc, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (UVK).

Le plan (UVK) est le plan passant par $U(0;0;6)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(7;0;3)$. Une équation cartésienne du plan (UVK) est donc $7(x-0)+0(y-0)+3(z-6)=0$ ou encore $7x+3z-18=0$.

c) La droite (FG) est la droite passant par $F(4;5;2,5)$ et de vecteur directeur $\frac{1}{4}\overrightarrow{GF}(1;0;0)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (FG) est $\left\{\begin{array}{l} x = 4+t \\ y = 5 \\ z = 2,5 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

Soit $Q(4+t;5;2,5)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (FG).

$$Q \in (UVK) \Leftrightarrow 7(4+t)+3\times 2,5-18 = 0 \Leftrightarrow 7t+17,5 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{17,5}{7} \Leftrightarrow t = -2,5.$$

Quand $t = -2,5$, on obtient les coordonnées du point N : $(1,5;5;2,5)$.

d) On place le point K de (ES) d'abscisse $1,2$ et le point N de (FG) d'abscisse $1,5$. On trace la parallèle à la droite (UV) passant par K. Elle coupe la droite (SF) en M. On peut alors tracer les segments $[KM]$ et $[MN]$. Enfin, la parallèle à la droite (UK) passant par N coupe la droite (BC) en P. On peut alors tracer le segment $[NP]$.

3) Soit H le projeté orthogonal de G sur la droite (OS). H le point de coordonnées $(0;0;2,5)$. L'angle du segment $[SG]$ avec l'horizontale est l'angle $\widehat{HGS}$. On sait que

$$\tan\left(\widehat{HGS}\right) = \frac{HS}{HG} = \frac{1}{5}.$$

On en déduit que $\widehat{HGS} = 11,3°$ arrondi à 10^{-1}. La condition est donc remplie.

