Rochambeau. 2017. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) La probabilité demandée est $P(X \geqslant 4000)$. La calculatrice donne $P(X \geqslant 4000) = 0,189$ arrondi au millième.

2) Soit a le montant minimum d'un devis demandé pour que celui-ci soit pris en compte.
L'énoncé fournit $P(X \leqslant a) = 0,1$. La calculatrice donne $a = 1298$ arrondi à l'euro.

Partie B

1) L'énoncé donne $P_S(D) = 0,95$, $P(S) = 0,6$ et $P(D) = 0,586$.

$$P(S \cap D) = P(S) \times P_S(D) = 0,6 \times 0,95 = 0,57.$$

2) La probabilité demandée est $P_{\overline{S}}(D)$.

$$P_{\overline{S}}(D) = \frac{P(\overline{S} \cap D)}{P(\overline{S})} = \frac{P(D) - P(S \cap D)}{1 - P(S)} = \frac{0,586 - 0,57}{1 - 0,6} = \frac{0,016}{0,4} = 0,04.$$

3) La probabilité demandée est $P_{\overline{D}}(S)$.

$$P_{\overline{D}}(S) = \frac{P(\overline{D} \cap S)}{P(\overline{D})} = \frac{P(S) - P(S \cap D)}{1 - P(D)} = \frac{0,6 - 0,57}{1 - 0,586} = \frac{0,03}{0,414} = 0,072 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

4) Ici, $n = 231$ et on veut tester l'hypothèse $p = 0,027$. On note que $n \geqslant 30$ puis $np = 6,237$ et donc $np \geqslant 5$ puis $n(1-p) = 224,763$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\begin{aligned}\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] &= \left[0,027 - 1,96\sqrt{\frac{0,027 \times 0,973}{231}}, 0,027 + 1,96\sqrt{\frac{0,027 \times 0,973}{231}}\right] \\ &= [0,006; 0,048]\end{aligned}$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \dfrac{13}{231} = 0,056$ arrondi à 10^{-3}.
La fréquence observée n'est pas dans l'intervalle de fluctuation et on peut donc remettre en cause l'affirmation du fabricant au risque de se tromper de 5%.

EXERCICE 2

Partie A

1) Soit $x \in [-2, 2]$, $f(-x) = -\dfrac{b}{8}\left(e^{-\frac{x}{b}} + e^{\frac{x}{b}}\right) + \dfrac{9}{4} = -\dfrac{b}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right) + \dfrac{9}{4} = f(x)$.

On en déduit que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe représentative de f.

2) f est dérivable sur $[-2, 2]$ et pour tout réel x de $[-2, 2]$,

$$f'(x) = -\frac{b}{8}\left(\left(\frac{1}{b}\right)e^{\frac{x}{b}} + \left(-\frac{1}{b}\right)e^{-\frac{x}{b}}\right) + 0 = -\frac{1}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}}\right).$$

3) Soit $x \in [-2, 2]$. Si $x > 0$, alors $-\dfrac{x}{b} < 0 < \dfrac{x}{b}$ puis $e^{-\frac{x}{b}} < e^{\frac{x}{b}}$ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$) puis $e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}} > 0$ et donc $f'(x) < 0$.
De même, si $x < 0$, alors $\dfrac{x}{b} < 0 < -\dfrac{x}{b}$ puis $f'(x) > 0$. Enfin, $f'(0) = 0$.

D'autre part, $f(0) = -\dfrac{b}{8}\left(e^0 + e^0\right) + \dfrac{9}{4} = -\dfrac{2b}{8} + \dfrac{9}{4} = \dfrac{9}{4} - \dfrac{b}{4}$.

On en déduit le tableau de variations de f :

x	-2		0		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$f(-2)$	$\nearrow$	$\dfrac{9}{4} - \dfrac{b}{4}$	$\searrow$	$f(2)$

La fonction f admet un maximum en 0 égal à $\dfrac{9}{4} - \dfrac{b}{4}$ ou encore le point S a pour coordonnées $\left(0, \dfrac{9}{4} - \dfrac{b}{4}\right)$

Partie B

1) $y_S = 2 \Leftrightarrow \dfrac{9}{4} - \dfrac{b}{4} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{b}{4} = \dfrac{9}{4} - 2 \Leftrightarrow \dfrac{b}{4} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow b = 1$. Donc, pour tout réel x de $[-2, 2]$, $f(x) = -\dfrac{1}{8}\left(e^x + e^{-x}\right) + \dfrac{9}{4}$.

2) $f(2) = -\dfrac{1}{8}\left(e^2 + e^{-2}\right) + \dfrac{9}{4} = 1,309\ldots$. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0, 2]$. On en déduit que pour tout réel k de $[f(2), f(0)] = [1,309\ldots; 2]$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[0, 2]$. Puisque $1,5$ est dans l'intervalle $[1,309\ldots; 2]$, l'équation $f(x) = 1,5$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[0, 2]$. Cette solution est α.

La calculatrice fournit $f(1,76) = 1,501\ldots$ et donc $f(1,76) > 1,5$ et $f(1,77) = 1,494\ldots$ et donc $f(1,77) < 1,5$. Ainsi, $f(1,76) > f(\alpha) > f(1,77)$ et donc, puisque f est strictement décroissante sur $[0, 2]$, $1,76 < \alpha < 1,77$.

Une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut est $1,76$.

3) L'unité d'aire est égale à 1 m^2. Puisque la fonction f est continue et positive sur $[0; 1,8]$, l'aire $\mathscr{A}$ d'un vantail, exprimée en m^2, est $\displaystyle\int_0^{1,8} f(x)\,dx$.

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_0^{1,8}\left(-\frac{1}{8}\left(e^x + e^{-x}\right) + \frac{9}{4}\right)dx = \left[-\frac{1}{8}\left(e^x - e^{-x}\right) + \frac{9}{4}x\right]_0^{1,8}\\ &= \left(-\frac{1}{8}\left(e^{1,8} - e^{-1,8}\right) + \frac{9 \times 1,8}{4}\right) - \left(-\frac{1}{8}\left(e^0 - e^0\right) + 0\right)\\ &= 4,05 - 0,125\left(e^{1,8} - e^{-1,8}\right).\end{aligned}$$

La masse exprimée en kg d'un vantail est donc $m = 20\displaystyle\int_0^{1,8} f(x)\,dx = 81 - 2,5\left(e^{1,8} - e^{-1,8}\right) = 66,2\ldots$. La masse d'un vantail dépasse 60 kg et donc le client décide d'automatiser son portail.

Partie C

L'aire, exprimée en m^2, du rectangle OCES est $2 \times 1,8 = 3,6$.

Une équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point abscisse 1 est $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$. $f(1) = \dfrac{9}{4} - \dfrac{1}{8}\left(e + e^{-1}\right)$ et $f'(1) = -\dfrac{1}{8}\left(e - e^{-1}\right)$.

Quand $x = 0$, on obtient

$$\mathrm{OG} = y_G = f(1) - f'(1) = \frac{9}{4} - \frac{1}{8}\left(e + e^{-1}\right) + \frac{1}{8}\left(e - e^{-1}\right) = \frac{9}{4} - \frac{2e^{-1}}{8} = \frac{9 - e^{-1}}{4}.$$

Quand $x = 1,8$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{CH} = y_H = f(1) + 0,8f'(1) &= \frac{9}{4} - \frac{1}{8}\left(e + e^{-1}\right) - \frac{0,8}{8}\left(e - e^{-1}\right) = \frac{9}{4} - \frac{1}{8}\left(e + e^{-1} + 0,8e - 0,8e^{-1}\right) \\ &= \frac{9}{4} - \frac{1}{8}\left(1,8e + 0,2e^{-1}\right) = \frac{9}{4} - \frac{2}{8}\left(0,9e + 0,1e^{-1}\right) = \frac{9 - 0,9e - 0,1e^{-1}}{4}.\end{aligned}$$

L'aire, exprimée en m^2, du trapèze OCHG est

$$\frac{\mathrm{OG} + \mathrm{CH}}{2} \times \mathrm{OC} = \frac{1,8}{2}\left(\frac{9 - e^{-1}}{4} + \frac{9 - 0,9e - 0,1e^{-1}}{4}\right) = \frac{1,8\left(18 - 0,9e - 1,1e^{-1}\right)}{8} = 3,408\ldots.$$

La forme 2 est effectivement plus avantageuse. L'économie réalisée en termes de surface de bois, exprimée en m^2, est de $3,6 - 3,408\ldots = 0,191\ldots$ soit environ $0,2$ m^2 pour un vantail.

EXERCICE 3

1) $u_0 = 3$. $u_0 + u_1 = u_0u_1$ et donc $3 + u_1 = 3u_1$ puis $u_1 = \dfrac{3}{2}$. $u_0 + u_1 + u_2 = u_0u_1u_2$ et donc $3 + \dfrac{3}{2} + u_2 = \dfrac{9}{2}u_2$ puis $u_2 = \dfrac{9}{7}$.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $s_{n+1} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n = s_n + u_n$. D'autre part,

$$s_n = u_0 + \ldots + u_{n-1} \geqslant u_0 > 1.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $s_n + u_n = s_{n+1} = u_0 \times \ldots \times u_{n-1} \times u_n = s_n \times u_n$ puis $s_nu_n - u_n = s_n$ puis $u_n(s_n - 1) = s_n$. Enfin, d'après la question précédente, $s_n \neq 1$ et finalement $u_n = \dfrac{s_n}{s_n - 1}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n - 1 = \frac{s_n}{s_n - 1} - 1 = \frac{s_n - (s_n - 1)}{s_n - 1} = \frac{1}{s_n - 1}.$$

D'après la question 2)a), $s_n > 1$ et donc $s_n - 1 > 0$. On en déduit que $u_n - 1 > 0$ et donc, $u_n > 1$.

3) a) Algorithme complété.

Entrée	Saisir n Saisir u
Traitement	s prend la valeur u Pour i allant de 1 à n : u prend la valeur $s/(s-1)$ s prend la valeur $s+u$ Fin pour
Sortie	Afficher u

b) Il semble que la suite (u_n) converge vers 1.

4) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $s_n > n$.

- $s_1 = u_0$ et donc $s_1 > 1$. L'inégalité est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $s_n > n$.

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + u_n \text{ (d'après la question 2.a)} \\ &> s_n + 1 \text{ (d'après la question 2.c)} \\ &> n + 1 \text{ (par hypothèse de récurrence)}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $s_n > n$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n > n$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Puisque $s_n \neq 0$, $u_n = \dfrac{s_n}{s_n - 1} = \dfrac{s_n}{s_n} \times \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{s_n}} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{s_n}}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{s_n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{1-0} = 1$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.}$$

EXERCICE 4.

Partie A

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'année $n+1$,

- $0,2a_n$ enfants prennent le programme A, $0,4a_n$ prennent le programme B, et donc $0,4a_n$ quittent l'association
- $0,6b_n$ enfants prennent le programme B, et donc $0,4b_n$ quittent l'association
- $0,4a_n + 0,4b_n$ enfants au total quittent donc l'association et ils sont remplacés par des enfants suivant le programme A.

Finalement, $a_{n+1} = 0,2a_n + (0,4a_n + 0,4b_n) = 0,6a_n + 0,4b_n$ et $b_{n+1} = 0,4a_n + 0,6b_n$. On en déduit que

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = U_n M.$$

On a montré que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n M$

2) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2^n & 75 - 75 \times 0,2^n \end{pmatrix}$.

- $\begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2^0 & 75 - 75 \times 0,2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150n & 0 \end{pmatrix} = U_0$. L'égalité est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $U_n = \begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2^n & 75 - 75 \times 0,2^n \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} U_{n+1} = U_n M &= \begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2^n & 75 - 75 \times 0,2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,6\,(75 + 75 \times 0,2^n) + 0,4\,(75 - 75 \times 0,2^n) & 0,4\,(75 + 75 \times 0,2^n) + 0,6\,(75 - 75 \times 0,2^n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (0,6 + 0,4) \times 75 + (0,6 - 0,4) \times 75 \times 0,2^n & (0,4 + 0,6) \times 75 + (0,4 - 0,6) \times 75 \times 0,2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 75 + 0,2 \times 75 \times 0,2^n & 75 - 0,2 \times 75 \times 0,2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2^{n+1} & 75 - 75 \times 0,2^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2^n & 75 - 75 \times 0,2^n \end{pmatrix}$.

3) Puisque $-1 < 0,2 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,2^n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (75 + 75 \times 0,2^n) = 75 + 75 \times 0 = 75$ et de même, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (75 - 75 \times 0,2^n) = 75 - 75 \times 0 = 75$.

Quand le temps passera, l'association tendra vers l'équilibre entre les deux programmes avec autant d'inscrits dans chaque programme.

Partie A

1) a) Si $a = 3$, $S = c_1 + c_3 + c_5 + a \times (c_2 + c_4) = 1 + 1 + 8 + 3 \times (1 + 3) = 22 = 2 \times 10 + 2$. Par suite, $k = 2$ et donc le numéro attribué à l'enfant devrait être : 111382. Le numéro 111383 ne peut pas être le numéro attribué à un enfant inscrit à l'association.

b) Pour le numéro $08c_3c_4c_5k$, $0 + c_3 + c_5 + 3 \times (8 + c_4) = 24 + c_3 + 3c_4 + c_5$. Pour le numéro $11c_3c_4c_5k$, $1 + c_3 + c_5 + 3 \times (1 + c_4) = 4 + c_3 + 3c_4 + c_5$. Puisque les entiers $24 + c_3 + 3c_4 + c_5$ et $4 + c_3 + 3c_4 + c_5$ sont congrus l'un à l'autre modulo 10, la clé k est la même pour les deux numéros. Cette clé ne permet donc pas de détecter l'erreur commise sur l'année de naissance.

2) a) Pour le premier numéro, $S_1 = c_1 + c_3 + c_5 + a\,(c_2 + c_4)$. Pour le deuxième numéro, $S_2 = c_1 + c_4 + c_5 + a\,(c_2 + c_3)$. La clé ne détecte pas l'erreur si et seulement si

$$c_1 + c_3 + c_5 + a\,(c_2 + c_4) \equiv c_1 + c_4 + c_5 + a\,(c_2 + c_3) \quad (10) \qquad (*).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow (c_1 + c_3 + c_5 + a\,(c_2 + c_4)) - (c_1 + c_4 + c_5 + a\,(c_2 + c_3)) \equiv 0 \quad (10) \\ &\Leftrightarrow c_3 + ac_4 - c_4 - ac_3 \equiv 0 \quad (10) \Leftrightarrow (a-1)c_4 - (a-1)c_3 \equiv 0 \quad (10) \\ &\Leftrightarrow (a-1)\,(c_4 - c_3) \equiv 0 \quad (10) \end{aligned}$$

b) $0 \times 0 \equiv 1 \quad (10)$, $2 \times 5 \equiv 0 \quad (10)$, $4 \times 5 \equiv 0 \quad (10)$, $5 \times 2 \equiv 0 \quad (10)$, $6 \times 5 \equiv 0 \quad (10)$ et $8 \times 5 \equiv 0 \quad (10)$. Donc, si $n \in \{0, 2, 4, 5, 6, 8, 10\}$, il existe un entier p entre 1 et 9 tel que $np \equiv 0 \quad (10)$.

Si $n \in \{1, 3, 7, 9\}$, alors n et $10 = 2 \times 5$ sont premiers entre eux. Par suite, si $p \in \mathbb{N}$,

$$np \equiv 0 \quad (10) \Rightarrow 10 \text{ divise } np \Rightarrow 10 \text{ divise } p \text{ (d'après le théorème de Gauss)}.$$

Il n'existe pas d'entier p compris entre 1 et 9 qui soit un multiple de 10 et donc il n'existe pas d'entier p compris entre 1 et 9 tel que $np \equiv 0 \quad (10)$.

En résumé, les entiers n compris entre 0 et 9 pour lesquels il existe un entier p compris entre 1 et 9 tel que $np \equiv 0 \quad (10)$ sont 0, 2, 4, 5, 6 et 8.

c) Si $a - 1$ est l'un des entiers précédents ou encore si $a \in \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$, il existe un entier p compris entre 1 et 9 tel que $(a - 1)p \equiv 0 \quad (10)$. Pour tout entier p compris entre 1 et 9, on peut toujours trouver deux chiffres c_3 et c_4 compris entre 0 et 9 tels que $c_4 - c_3 = p$ (par exemple, $c_3 = 0$ et $c_4 = p$). Dans ce cas, d'après la question a), la clé ne détecte pas l'interversion quand par exemple, $c_3 = 0$ et $c_4 = p$.

En résumé, si $a \in \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$, la clé ne détecte pas systématiquement l'interversion des chiffres c_3 et c_4.

Supposons maintenant que $a \in \{2, 4, 8\}$. Alors, $a - 1 \in \{1, 3, 7\}$ de sorte que $a - 1$ est premier à 10. Dans ce cas, il n'existe pas d'entiers p compris entre 1 et 9 tel que $(a - 1)p \equiv 0 \quad (10)$.
Puisque c_3 et c_4 sont deux chiffres distincts compris entre 0 et 9, $c_4 - c_3$ est un entier relatif compris entre -9 et -1 ou entre 1 et 9. Dans tous les cas, $c_4 - c_3$ est congru modulo 10 à un certain entier p compris entre 1 et 9. Mais alors, pour tous c_3 et c_4, chiffres distincts compris entre 0 et 9, $(a - 1)(c_4 - c_3) \not\equiv 0 \quad (10)$. Dans ce cas, la clé détecte systématiquement l'interversion des chiffres c_3 et c_4.

En résumé, la clé détecte systématiquement l'interversion des chiffres distincts c_3 et c_4 si et seulement si a est l'un des entiers 2, 4 ou 8.

