Pondichéry. 2017. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) D'après la formule des probabilités totales

$$p(C) = p(A) \times p_A(C) + p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(C) = 0,98x + 0,95(1-x) = 0,03x + 0,95.$$

2) Si de plus $P(C) = 0,96$, alors $0,03x + 0,95 = 0,96$ puis $0,03x = 0,01$ ou encore $x = \frac{1}{3}$. Dans ce cas, $p(A) = \frac{1}{3}$ et $p\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 2 \times p(A)$.

Si 96% des tablettes sont commercialisables, la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois supérieure à la probabilité que la tablette provienne de la chaîne A.

Partie B

1) On sait que l'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$. Ici, $\frac{1}{\lambda} = 5$ ou encore $\lambda = \frac{1}{5} = 0,2$.

2) Pour $t \geqslant 0$

$$P(Z \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0,2t},$$

puis

$$P(Z > t) = 1 - P(Z \leqslant t) = e^{-0,2t}.$$

En particulier, $P(Z > 2) = e^{-0,2\times 2} = e^{-0,4} = 0,670$ arrondie au millième.

3) On sait que la loi exponentielle de paramètre λ est une loi sans vieillissement ou encore

$$P_{Z>3}(Z > 5) = P_{Z>3-3}(Z > 5-3) = P(Z > 2) = e^{-0,4} = 0,670 \text{ arrondie au millième.}$$

Partie C

1) La calculatrice (ou le cours) fournit $P(83 \leqslant X \leqslant 87) = P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) = 0,683$ arrondie au millième.

La teneur en cacao annoncée sur l'emballage est de 85%. La probabilité demandée est $1 - P(83 \leqslant X \leqslant 87) = 0,317$ arrondie au millième.

2) Pour des raisons de symétrie,

$$P(85 - a \leqslant X \leqslant 85 + a) = 1 - P(X \leqslant 85 - a) - P(X \geqslant 85 + a) = 1 - 2P(X \leqslant 85 - a),$$

et donc

$$P(85 - a \leqslant X \leqslant 85 + a) = 0,9 \Leftrightarrow 1 - 2P(X \leqslant 85 - a) = 0,9 \Leftrightarrow P(X \leqslant 85 - a) = 0,05.$$

La calculatrice fournit $85 - a = 81,7102\ldots$ puis $a = 3,290$ arrondi au millième. Ceci signifie que la probabilité que la teneur en cacao soit différente d'au plus $3,3\%$ de la valeur affichée est d'environ $0,9$.

3) Ici, $n = 550$ et on suppose que $p = 0,9$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 495 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 55 \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,9 - 1,96\sqrt{\frac{0,9\times 0,1}{550}}; 0,9 + 1,96\sqrt{\frac{0,9\times 0,1}{550}}\right] = [0,874; 0,926]$$

en arrondissant de manière à élargir légèrement l'intervalle. La fréquence observée sur l'échantillon est $f = 1 - \frac{80}{550} = \frac{470}{550} = 0,8545\ldots$

La fréquence f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation et on peut donc affirmer que la chocolaterie ment au risque de se tromper de 5%.

EXERCICE 2

1) a) Le discriminant de l'équation (E) est

$$\Delta = (-6)^2 - 4c = 36 - 4c = 4(9 - c).$$

Puisque $c > 9$, on a $\Delta < 0$ et donc l'équation (E) admet deux solutions complexes non réelles conjuguées z_A et z_B.

b) Puisque $\Delta = -4(c-9)$ avec $c-9 > 0$, on a $z_A = \dfrac{6 + i\sqrt{4(c-9)}}{2 \times 1} = \dfrac{6 + 2i\sqrt{c-9}}{2} = 3+i\sqrt{c-9}$ et $z_B = 3-i\sqrt{c-9}$.

2) $OA = |z_A| = \left|3 + i\sqrt{c-9}\right| = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{c-9}\right)^2} = \sqrt{9 + c - 9} = \sqrt{c}$.
De même, $OB = \left|3 - i\sqrt{c-9}\right| = \sqrt{3^2 + \left(-\sqrt{c-9}\right)^2} = \sqrt{9 + c - 9} = \sqrt{c}$ (on peut aussi écrire $OB = |z_B| = |\overline{z_A}| = |z_A| = OA$).

Puisque $OA = OB$, le triangle OAB est isocèle en O.

3) $BA = |z_A - z_B| = \left|2i\sqrt{c-9}\right| = 2\sqrt{c-9}|i| = 2\sqrt{c-9}$. Puis

$$\begin{aligned}
BA^2 = OA^2 + OB^2 &\Leftrightarrow \left(2\sqrt{c-9}\right)^2 = \left(\sqrt{c}\right)^2 + \left(\sqrt{c}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow 4(c-9) = 2c \Leftrightarrow 4c - 36 = 2c \Leftrightarrow 2c = 36 \\
&\Leftrightarrow c = 18.
\end{aligned}$$

De plus, on a effectivement $18 > 9$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, si $c = 18$, le triangle OAB est rectangle en O.

EXERCICE 3

1) Si $x \in [-2,5;2,5]$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 2,5^2$ ou encore $0 \leqslant x^2 \leqslant 6,25$ puis $-12,5 \leqslant -2x^2 \leqslant 0$ et enfin $1 \leqslant -2x^2+13,5 \leqslant 13,5$. En particulier, si $x \in [-2,5;2,5]$, alors $-2x^2+13,5 > 0$.

f est de la forme $x \mapsto \ln(u(x))$ avec $u(x) = -2x^2+13,5$. D'après ce qui précède, pour tout x de $[-2,5;2,5]$, $u(x) > 0$. Donc, f est dérivable sur $[-2,5;2,5]$ et pour tout x de $[-2,5;2,5]$,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-4x}{-2x^2+13,5}.$$

2) Pour $x \in [-2,5;2,5]$, $-2x^2+13,5 > 0$. Donc, pour $x \in [-2,5;2,5]$, $f'(x)$ est du signe de $-4x$ ou encore du signe de $-x$. Donc, la fonction f' est strictement positive sur $[-2,5;0[$ et strictement négative sur $]0;2,5]$ puis la fonction f est strictement croissante sur $[-2,5;0]$ et strictement décroissante sur $[0,;2,5]$. De plus, $f(-2,5) = f(2,5) = \ln(-2\times 2,5^2+13,5) = \ln(1) = 0$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-2,5$		0		$2,5$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\ln(13,5)$	$\searrow$	0

Puisque f est croissante sur $[-2,5;0]$, si $-2,5 \leqslant x \leqslant 0$, alors $f(x) \geqslant f(-2,5)$ ou encore $f(x) \geqslant 0$. Ainsi, la fonction f est positive sur $[-2,5;0]$. De même, la fonction f est positive sur $[0;2,5]$ et finalement sur $[-2,5;2,5]$.

Partie B

1) Soient A et B les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives $2,5$ et 0. A a donc pour coordonnées $(2,5;0)$ et B a pour coordonnées $(0;\ln(13,5))$. Donc, $OA = 2,5$ et $OB = \ln(13,5)$ avec $\ln(13,5) = 2,6\ldots$
On a $OA \neq OB$ et donc, la courbe $\mathscr{C}$ n'est pas un arc de cercle de centre O.

2) On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points du plan situés entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$. Puisque la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, l'aire de $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire est le double de celle de la partie de $\mathscr{D}$ située à droite de l'axe (Oy).

Puisque la fonction f est positive sur $[0;2,5]$, cette aire exprimée en unités d'aire est égale à $2\int_0^{2,5} f(x)\,dx$. Enfin, l'unité de longueur est de 2m et donc l'unité d'aire est égale à 4m^2. Finalement, l'aire de $\mathscr{D}$, exprimée en m^2, notée $\mathscr{A}$ est

$$\mathscr{A} = 4\times 2\int_0^{2,5} f(x)\,dx = 8\int_0^{2,5} f(x)\,dx.$$

3) a) Tableau complété

La case située ligne $k=1$, colonne R, est $R = \frac{2,5}{50}f\left(\frac{2,5}{50}\right) = 0,130\,115$ puis en colonne S, $S = 0+R = 0,130\,115$.

En ligne $k=4$, la colonne R contient $\frac{2,5}{50}f\left(\frac{2,5}{50}\times 4\right) = 0,129\,837$. En colonne S, on écrit le résultat de $0,390\,144 + 0,129\,837$ soit $0,519\,981$.

k	R	S
1	0,130 115	0,130 115
2	0,130 060	0,260 176
3	0,129 968	0,390 144
4	0,129 837	0,519 981
⋮		⋮
24	0,118 137	3,025 705
25	0,129 837	3,142 675
⋮		⋮
49	0,020 106	5,197 538
50	0	5,197 538

L'algorithme affiche $\mathsf{S} = 5,197\,538$.

b) On prend donc $a = 5,197\,538$. On a $\dfrac{f(0) - f(2,5)}{n} = \dfrac{\ln(13,5)}{50}$. D'après l'énoncé,

$$5,197\,538 \leqslant I \leqslant 5,197\,538 + 2,5\frac{\ln(13,5)}{50},$$

et donc, puisque $\mathscr{A} = 8I$,

$$8 \times 5,197\,538 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 8 \times \left(5,197\,538 + 2,5\frac{\ln(13,5)}{50}\right),$$

et donc

$$41,580\,304 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 42,621\,380.$$

L'aire de la zone de creusement est donc 42m^2 au m^2 près.

EXERCICE 4.

Partie A

1) Dans la case B3, on a entré =2*B2+3*C2 et dans la case C3, on a entré =2*B2+C2.

2) PGCD$(1,1)=1$, PGCD$(5,3)=1$, PGCD$(19,13)=1$ (car 13 et 19 sont des nombres premiers distincts).
Ensuite, PGCD$(77,51)=$ PGCD$(77-51,51)=$ PGCD$(26,51)=$ PGCD$(26,25)=1$.

Il semble qu'en général PGCD $(u_n,v_n)=1$.

3) $\dfrac{u_{10}}{v_{10}}=\dfrac{1\,258\,291}{838\,861}=1,49\ldots$ $\dfrac{u_{11}}{v_{11}}=\dfrac{5\,033\,165}{3\,355\,443}=1,50\ldots$ $\dfrac{u_{12}}{v_{12}}=\dfrac{20\,132\,659}{13\,421\,773}=1,49\ldots$ et $\dfrac{u_{13}}{v_{13}}=\dfrac{80\,530\,637}{53\,687\,091}=1,50\ldots$.

Il semble que Flore ait raison et que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers un nombre environ égal à $1,5$.

Partie B

1) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $2u_n-3v_n=(-1)^{n+1}$.

- $2u_0-3v_0=2\times 1-3\times 1=-1=(-1)^{0+1}$. L'égalité est donc vraie quand $n=0$.
- Soit $n\geqslant 0$. Supposons que $2u_n-3v_n=(-1)^{n+1}$.

$$\begin{aligned}2u_{n+1}-3v_{n+1}&=2\left(2u_n+3v_n\right)-3\left(2u_n+v_n\right)=-2u_n+3v_n=-\left(2u_n-3v_n\right)\\&=-(-1)^{n+1}\ \text{(par hypothèse de récurrence)}\\&=(-1)^{(n+1)+1}.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $2u_n-3v_n=(-1)^{n+1}$.

2) Soit n un entier naturel. En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par $(-1)^{n+1}$, on obtient

$$\left(2(-1)^{n+1}\right)u_n+\left(-3(-1)^{n+1}\right)v_n=\left((-1)^{n+1}\right)^2=\left((-1)^2\right)^{n+1}=1^{n+1}=1.$$

D'après le théorème de Bézout, on peut affirmer que les entiers u_n et v_n sont premiers entre eux ou encore que PGCD $(u_n,v_n)=1$.

Partie C

1) a) $\begin{pmatrix}1&3\\-1&2\end{pmatrix}\times\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}2&-3\\1&1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$ et
$\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}2&-3\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\-1&2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$.

Donc, la matrice P est inversible et $P^{-1}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}2&-3\\1&1\end{pmatrix}$.

b) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}&=X_n=Q_nP^{-1}X_0\\&=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}(-1)^n&3\times 2^{2n}\\(-1)^{n+1}&2^{2n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2(-1)^n+3\times 2^{2n}&-3(-1)^n+3\times 2^{2n}\\2(-1)^{n+1}+2^{2n+1}&-3(-1)^{n+1}+2^{2n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2(-1)^n+3\times 2^{2n}-3(-1)^n+3\times 2^{2n}\\2(-1)^{n+1}+2^{2n+1}-3(-1)^{n+1}+2^{2n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{-(-1)^n+6\times 2^{2n}}{5}\\\dfrac{-(-1)^{n+1}+2\times 2^{2n+1}}{5}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\dfrac{(-1)^{n+1}+3\times 2^{2n+1}}{5}\\\dfrac{(-1)^n+2^{2n+2}}{5}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Donc, pour tout entier naturel n, $u_n=\dfrac{(-1)^{n+1}+3\times 2^{2n+1}}{5}$ et $v_n=\dfrac{(-1)^n+2^{2n+2}}{5}$.

2) a) Soit n un entier naturel.

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\dfrac{(-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}}{5}}{\dfrac{(-1)^n + 2^{2n+2}}{5}} = \frac{(-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}}{(-1)^n + 2^{2n+2}} = \frac{2^{2n+1}\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3\right)}{2^{2n+1}\left(\dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1}} + 2\right)}$$
$$= \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3}{\dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1}} + 2}.$$

b) $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}\right| = \dfrac{1}{2^{2n+1}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{(2^2)^n} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4^n}$. Puis que $4 > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 4^n = +\infty$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4^n} = 0$.
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} = 0$. De même, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1}} = 0$ et finalement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{3+0}{2+0} = \dfrac{3}{2}$.

EXERCICE 5.

Le plan $\mathscr{P}$ n'est parallèle à aucune des faces du cube car un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ qui n'est orthogonal à aucun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ ou $\overrightarrow{AE}$.

1 ère solution. (on obtient les coordonnées exactes des différents sommets de la section)

• **Intersection de $\mathscr{P}$ avec** (AB)**.** Les points de (AB) sont les points de coordonnées $(\lambda, 0, 0)$. Un tel point appartient à $\mathscr{P}$ si et seulement si $\lambda = 1$. Donc, $\mathscr{P} \cap (AB) = \{B\}$.

• **Intersection de $\mathscr{P}$ avec** (EF)**.** Le point E a pour coordonnées $(0, 0, 1)$ et le point F a pour coordonnées $(1, 0, 1)$. Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées $(1, 0, 0)$. La droite (EF) admet pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}\right., \lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $M(\lambda, 0, 1)$ un point de (EF). $M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{3} - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$. Donc $\mathscr{P} \cap (EF) = \{I\}$ où $I\left(\frac{2}{3}, 0, 1\right)$.

Mais alors, la section de la face $ABFE$ par le plan $\mathscr{P}$ est le segment $[BI]$.

• **Intersection de $\mathscr{P}$ avec** (GH)**.** Le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$ et le point H a pour coordonnées $(0, 1, 1)$. Le vecteur $\overrightarrow{GH}$ a pour coordonnées $(-1, 0, 0)$. La droite (GH) admet pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}\right.$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $M(1 - \lambda, 1, 1)$ un point de (GH). $M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow (1 - \lambda)\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{5}{6}$. Donc $\mathscr{P} \cap (GH) = \{J\}$ où $J\left(\frac{1}{6}, 1, 1\right)$.

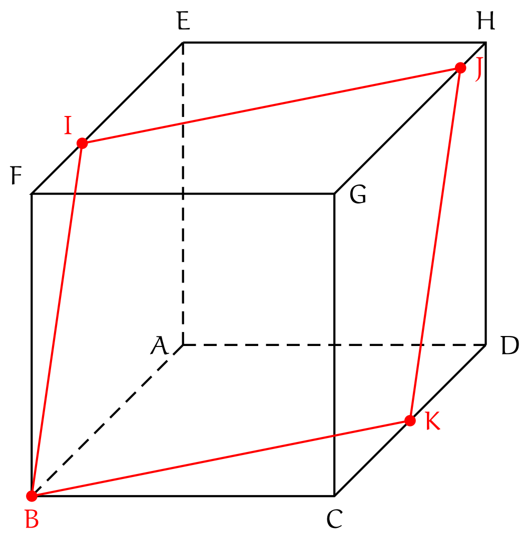
La section de la face $EFGH$ par le plan $\mathscr{P}$ est le segment $[IJ]$.

• **Intersection de $\mathscr{P}$ avec** (CD)**.** Le point D a pour coordonnées $(0, 1, 0)$ et le point C a pour coordonnées $(1, 1, 0)$. Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour coordonnées $(1, 0, 0)$. La droite (DC) admet pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array}\right., \lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $M(\lambda, 1, 0)$ un point de (GH). $M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$. Donc $\mathscr{P} \cap (DC) = \{K\}$ où $K\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$.

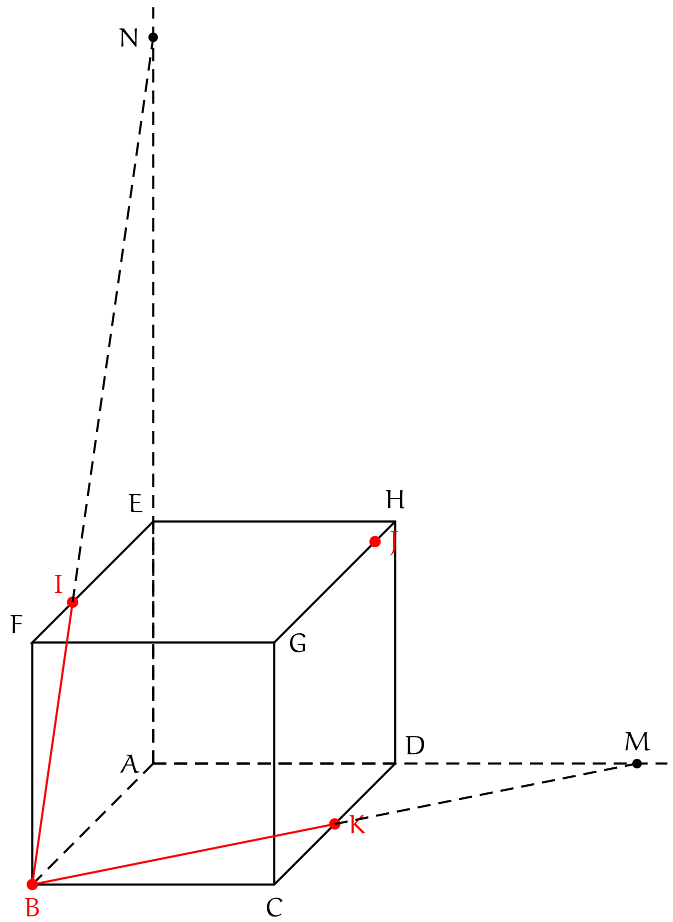
La section de la face $GHCD$ par le plan $\mathscr{P}$ est le segment $[JK]$ puis la section de la face $ABCD$ par le plan $\mathscr{P}$ est le segment $[KB]$.

On peut alors tracer la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.



2 ème solution. (On se contente de construire les sommets de la section en cherchant d'abord les intersections avec les axes qui sont bien plus simples à déterminer. C'est très certainement cette solution qui était attendue.)

Soit $M(x, y, z)$ un point du plan $\mathscr{P}$. Si $x = y = 0$, alors $z = 3$, si $x = z = 0$, alors $y = 2$ et si $y = z = 0$, alors $x = 1$. Les points d'intersection du plan $\mathscr{P}$ avec les droites (AB), (AD) et (AE) sont les points B, M et N de coordonnées respectives $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ et $(0, 0, 3)$. En traçant les droites (MB) et (NB), on obtient la trace $[BK]$ du plan $\mathscr{P}$ sur la face $ABCD$ et la trace $[BI]$ du plan $\mathscr{P}$ sur la face $ABFE$.



La trace [KJ] du plan $\mathscr{P}$ sur la face CDGH est alors obtenue en traçant la parallèle à (BI) passant par K et enfin la trace du plan $\mathscr{P}$ sur la face EFGH est le segment $[\mathsf{IJ}]$.