Nouvelle Calédonie. Novembre 2017.
Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) La probabilité demandée est $\dfrac{14-12}{15-12} = \dfrac{2}{3}$.

2) La durée moyenne du trajet, exprimée en minutes, est $\dfrac{12+15}{2} = 13,5$.

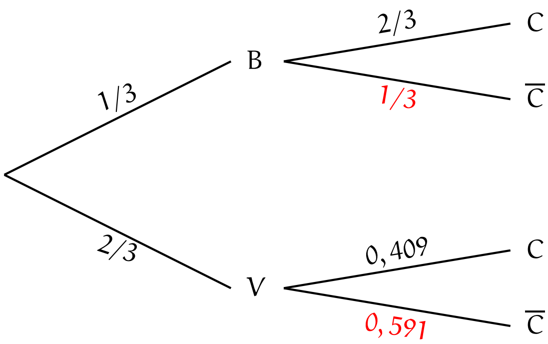
Partie B

1) La probabilité demandée est $P(T_V \leqslant 14)$ ou encore $P(T_V \leqslant \mu)$. On sait que cette probabilité est égale à $0,5$.

2) La probabilité demandée est $P(12 \leqslant T_V \leqslant 14)$. La calculatrice fournit $P(12 \leqslant T_V \leqslant 14) = 0,409$ arrondi à 10^{-3}.

Partie C

1) Sonia prend le bus si et seulement si elle obtient 1 ou 2 en lançant le dé. Donc, $P(B) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ puis $P(V) = 1 - P(B) = \dfrac{2}{3}$. Représentons alors la situation par un arbre de probabilités. D'après les question A.1) et B.2),



La probabilité demandée est $P(C)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(C) = P(B) \times P_B(C) + P(V) \times P_V(C) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times 0,409 = 0,49 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

2) La probabilité demandée est $P_C(B)$.

$$P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B) \times P_B(C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{0,49} = 0,11 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

EXERCICE 2

1) Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x} \times (\ln x)^2$. $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to 0} (\ln x)^2 = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$. On en déduit que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe représentative de f.

2) a) Soit x un réel strictement positif. $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2} \ln x$ et donc $\ln x = 2\ln\left(\sqrt{x}\right)$ puis

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{(\ln x)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{2\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2.$$

b) D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4 \times 0^2 = 0$. On en déduit que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

3) a) Pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \times x - (\ln x)^2 \times 1}{x^2} = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}.$$

b) Pour tout réel $x > 0$, $x^2 > 0$ et donc, pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $\ln x(2 - \ln x)$. Puisque la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$,

- $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ (et aussi $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $\ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$),
- $2 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 2 \Leftrightarrow x < e^2$ (et aussi $2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^2$ et $\ln x < 0 \Leftrightarrow x > e^2$).

On peut alors représenter le signe de la fonction f' dans un tableau de signes :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	
$2 - \ln x$	$\Vert$	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

c) $f(1) = \dfrac{(\ln 1)^2}{1} = 0$ et $f\left(e^2\right) = \dfrac{\left(\ln\left(e^2\right)\right)^2}{e^2} = \dfrac{2^2}{e^2} = \dfrac{4}{e^2}$.

4) Sur $[1, +\infty[$, f admet un maximum égal à $\dfrac{4}{e^2}$. Mais $e > 2$ et donc $\dfrac{4}{e^2} < 1$. Ainsi, pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $f(x) \leqslant \dfrac{4}{e^2} < 1$. En particulier, l'équation $f(x) = 1$ n'admet pas de solution dans $[1, +\infty[$.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0, 1]$. On sait alors que pour tout réel k de $\left[f(1), \lim\limits_{x \to 0} f(x)\right[= [0, +\infty[$ (d'après la question 1), l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans $]0, 1]$. En particulier, puisque le réel 1 appartient à $[0, +\infty[$, l'équation $f(x) = 1$ admet une solution et une seule, notée α, dans $]0, 1]$.

Finalement, l'équation $f(x) = 1$ admet une solution et une seule, notée α, dans $]0, +\infty[$.

EXERCICE 3

Partie A

Puisque la fonction f est positive sur $[0, \ln 2]$, l'aire demandée est $\displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\ dx$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} f(x)\ dx &= \int_0^{\ln 2} \left(2e^x - e^{2x}\right)\ dx \\
&= \left[2e^x - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2} = \left(2e^{\ln 2} - \frac{1}{2}e^{2\ln 2}\right) - \left(2e^0 - \frac{1}{2}e^0\right) = \left(2e^{\ln 2} - \frac{1}{2}\left(e^{\ln 2}\right)^2\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2^2\right) - \frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

La proposition A est donc fausse.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. L'abscisse du point S_n est solution de l'équation $f_n'(x) = 0$. Soit x un réel.

$$\begin{aligned}
f_n'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2ne^x - 2e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 2e^x\left(n - e^x\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow n - e^x = 0 \text{ (car } 2e^x \neq 0) \\
&\Leftrightarrow e^x = n \Leftrightarrow x = \ln n.
\end{aligned}$$

L'ordonnée y_n du point S_n est alors

$$y_n = f(\ln n) = 2ne^{\ln n} - e^{2\ln n} = 2 \times n - \left(e^{\ln n}\right)^2 = 2n^2 - n^2 = n^2.$$

La proposition B est donc vraie.

EXERCICE 4.

1) a) Soit n un entier naturel. $z_n \neq 0$ puis

$$\begin{aligned}\frac{z_{n+4}}{z_n} &= \frac{(1+i)/(1-i)^{n+4}}{(1+i)/(1-i)^n} = \frac{1+i}{(1+i)^{n+4}} \times \frac{(1+i)^n}{1-i} = \frac{1}{(1+i)^4} \\ &= \frac{1}{((1+i)^2)} = \frac{1}{(1+2i-1)^2} = \frac{1}{(2i)^2} \\ &= -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+4}}{z_n} = -\dfrac{1}{4}$ et en particulier $\dfrac{z_{n+4}}{z_n}$ est un réel.

b) Soit n un entier naturel. D'après la question précédente, $z_{n+4} = -\dfrac{1}{4}z_n$. Cette dernière égalité fournit l'égalité $\overrightarrow{OA_{n+4}} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{OA_n}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{OA_n}$ et $\overrightarrow{OA_{n+4}}$ sont colinéaires ou encore les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.

2) (On rappelle que pour tout entier naturel n, $z_n \neq 0$). Un argument de $1+i$ est $\dfrac{\pi}{4}$ et un argument de $1-i$ est $-\dfrac{\pi}{4}$.

Donc, pour tout entier naturel n, un argument de z_n est $\dfrac{\pi}{4} - n\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = (n+1)\dfrac{\pi}{4}$. Soit alors n un entier naturel.

$$\begin{aligned}z_n \text{ réel} &\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z}/ \arg(z_n) = k\pi \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z}/\ (n+1)\frac{\pi}{4} = k\pi \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z}/\ n+1 = 4k \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z}/\ n = 4k-1 \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{N}^*/\ n = 4k-1 \text{ (car } n \text{ est un entier naturel).}\end{aligned}$$

Finalement, z_n est réel si et seulement si n est un entier naturel de la forme $4k-1$ où k est un entier naturel non nul.

EXERCICE 5.

1) a) $b_1 = 0,3b_0 + 0,5c_0 = 0,3 \times 1\ 000 + 0,5 \times 1\ 500 = 300 + 750 = 1\ 050$ et
$c_1 = -0,5b_0 + 1,3c_0 = -0,5 \times 1\ 000 + 1,3 \times 1\ 500 = -500 + 1\ 950 = 1\ 450$. Donc,

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1\ 050 \\ 1\ 450 \end{pmatrix}.$$

$b_2 = 0,3b_1 + 0,5c_1 = 0,3 \times 1\ 050 + 0,5 \times 1\ 450 = 315 + 725 = 1\ 040$ et
$c_2 = -0,5b_1 + 1,3c_1 = -0,5 \times 1\ 050 + 1,3 \times 1\ 450 = -525 + 1\ 885 = 1\ 360$. Donc,

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1\ 040 \\ 1\ 360 \end{pmatrix}.$$

b) Soit n un entier naturel.

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3b_n + 0,5c_n \\ -0,5b_n + 1,3c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ -0,5 & 1,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix} = AU_n.$$

2) a) $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+a & 1 \end{pmatrix}$ puis $PQ = I \Leftrightarrow 1 + a = 0 \Leftrightarrow a = -1$. Puisqu'il est admis que P admet un inverse de la forme de Q, il n'est pas nécessaire de vérifier que pour $a = -1$, on a effectivement $QP = I$.

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, on a $A^n = PT^nQ$.

- $PT^1Q = PTQ = A = A^1$. La formule à démontrer est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $A^n = PT^nQ$. Alors,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PT^nQPTQ \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= PT^nITQ = PT^nTQ \\ &= PT^{n+1}Q. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $A^n = PT^nQ$.

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $T^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix}$.

- $\begin{pmatrix} 0,8^1 & 0,5 \times 1 \times 0,8^{1-1} \\ 0 & 0,8^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix} = T$. La formule à démontrer est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $T^n = \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T^n \times T \\ &= \begin{pmatrix} 0,8^n & 0,5n \times 0,8^{n-1} \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,5 \\ 0 & 0,8 \end{pmatrix} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8^{n+1} & 0,5 \times 0,8^n + 0,5n \times 0,8^n \\ 0 & 0,8^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8^{n+1} & 0,5(n+1) \times 0,8^n \\ 0 & 0,8^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $T^n = \begin{pmatrix} & 0,8^n \\ 0,5n \times 0,8^{n-1} & \\ 0 & 0,8^n \end{pmatrix}$.

3) L'algorithme affiche la première valeur de N pour laquelle $B \leqslant 2$ et $C \leqslant 2$ ou encore, l'algorithme affiche le numéro de la première année où le nombre de buses et le nombre de campagnols est au plus 2.
Donc, en 2040, il ne devrait plus y avoir qu'au maximum deux buses et deux campagnols. Il semble que les populations de buses et de campagnols soient en voie d'extinction.

4) a) Puisque $-1 < 0,8 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1000 \times 0,8^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1500 \times 0,8^n = 0$.
D'autre part, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant n \times 0,8^n \leqslant 10 \times 1,1^n \times 0,8^n$ ou encore $0 \leqslant n \times 0,8^n \leqslant 10 \times 0,88^n$. Puisque $-1 < 0,88 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 10 \times 0,88^n = 0$. Mais alors, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} n0,8^n = 0$.
On en déduit enfin que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 0$.

b) Ainsi, dans le cadre du modèle proposé, les populations de buses et de campagnols seraient en voie d'extinction. L'expérience montre que cela ne semble pas être le cas et il semble donc que le modèle proposé ne soit pas cohérent.

