Liban. 2017. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Le point D a pour coordonnées $(0,0,0)$ et le point F a pour coordonnées $(1,1,1)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées $(1,1,1)$.
Le point B a pour coordonnées $(1,1,0)$, le point E a pour coordonnées $(1,0,1)$ et le point G a pour coordonnées $(0,1,1)$. Donc, le vecteur $\overrightarrow{BE}$ a pour coordonnées $(0,-1,1)$ et le vecteur $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $(-1,0,1)$.

$$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BE} = 1\times 0 + 1\times(-1) + 1\times 1 = 0$$

et

$$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BG} = 1\times(-1) + 1\times 0 + 1\times 1 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (EBG). Donc, le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal au plan (EBG).

2) Le plan (EBG) est le plan passant par le point $B(1,1,0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{DF}(1,1,1)$. Une équation cartésienne du plan (EBG) est donc $1\times(x-1)+1\times(y-1)+1\times(z-0)=0$ ou encore $x+y+z-2=0$.

3) La droite (DF) est la droite passant par $D(0,0,0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{DF}(1,1,1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (DF) est $\left\{\begin{array}{l} x=t\\ y=t\\ z=t\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.

Soit $M(t,t,t)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de la droite (DF).

$$M\in(EBG)\Leftrightarrow t+t+t-2=0\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}.$$

Quand $t=\dfrac{2}{3}$, on obtient les coordonnées du point I : $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

Partie B

1) $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DB} = 1\times 1+0\times 1+1\times 0 = 1$. D'autre part, $[DE]$ est la diagonale d'un carré de côté 1 et donc $DE=\sqrt{2}$. De même, $DB=\sqrt{2}$ puis

$$\cos\left(\widehat{EDB}\right) = \frac{\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DB}}{DE\times DB} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que $\widehat{EDB}=\dfrac{\pi}{3}$. D'autre part, $\widehat{EFB}=\dfrac{\pi}{2}$.

2) a) D'après la question 3) de la partie A, les coordonnées du point M sont de la forme (x,x,x) où $x\in\mathbb{R}$. De plus, le point M appartient au segment $[DF]$ si et seulement si $x\in[0,1]$.

b) $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{EM}.\overrightarrow{BM} = (x-1)(x-1)+(x-0)(x-1)+(x-1)(x-0) = x^2-2x+1+x^2-x+x^2-x = 3x^2-4x+1$.
$EM=\sqrt{(x-1)^2+(x-0)^2+(x-1)^2}=\sqrt{x^2-2x+1+x^2+x^2-2x+1}=\sqrt{3x^2-4x+2}$ et
$BM=\sqrt{(x-1)^2+(x-1)^2+(x-0)^2}=\sqrt{3x^2-4x+2}=EM$. Donc,

$$\cos(\theta)=\frac{\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MB}}{EM\times BM}=\frac{3x^2-4x+1}{\left(\sqrt{3x^2-4x+2}\right)^2}=\frac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}.$$

3) a) Le triangle MEB est rectangle en M si et seulement si $\cos(\theta)=0$ ce qui équivaut à $x=\dfrac{1}{3}$ ou $x=1$. $x=1$ est le cas où $M=F$. $x=\dfrac{1}{3}$ est le cas où M est le point J.

En résumé, le triangle EMB est rectangle en M si et seulement si $M=F$ ou $M=J$.

b) La fonction cosinus est décroissante sur $[0,\pi]$ et donc θ est maximal si et seulement si $\cos(\theta)$ est minimal ce qui équivaut à $x=\dfrac{2}{3}$. $x=\dfrac{2}{3}$ est le cas où M est le point I.

En résumé, θ est maximal si et seulement si $M=I$ et dans ce cas $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$.

EXERCICE 2

Partie A

1) 75 voitures attendent en moyenne 1 minute, 19 voitures attendent en moyenne 3 minutes, 10 voitures attendent en moyenne 5 minutes et 5 voitures attendent en moyenne 7 minutes. La moyenne de ces durées d'attente est

$$\frac{75 \times 1 + 19 \times 3 + 10 \times 5 + 5 \times 7}{75 + 19 + 10 + 5} = \frac{217}{109} = 1,9908\ldots$$

En arrondissant, une estimation de la durée d'attente moyenne d'une voiture à l'entrée du parking est 2 minutes.

2) a) L'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$. Il est donc cohérent de prendre $\frac{1}{\lambda} = 2$ ou encore $\lambda = 0,5$.

b) On sait que pour tout $t \geqslant 0$,

$$P(T \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0,5t}.$$

Donc, $P(T \leqslant 2) = 1 - e^{-0,5\times 2} = 1 - e^{-1} = 0,6321$ arrondi à 10^{-4}.

c) La probabilité demandée est $P_{T\geqslant 1}(T \leqslant 2)$. On sait que la loi exponentielle est une loi sans vieillissement et donc cette probabilité est aussi $P(T \leqslant 1)$ avec

$$P(T \leqslant 1) = 1 - e^{-0,5} = 0,3935 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

Partie B

1) a) La durée moyenne de stationnement est μ minutes ou encore 70 minutes.

b) La probabilité demandée est $P(D \geqslant 120)$. La calculatrice fournit $P(D \geqslant 120) = 0,0478$ arrondi à 10^{-4}.

c) Soit a le réel tel que $P(D \leqslant a) = 0,99$. La calculatrice fournit $a = 139,7\ldots$ ou encore 140 minutes arrondi à la minute. Donc pour au moins 99% des voitures, le temps d'attente est au maximum 140 minutes ou encore 2 heures et 20 minutes.

2) Soit G la variable aléatoire égale au tarif en euros. L'espérance de G est

$$\begin{aligned} E(G) &= P(D \leqslant 15) \times 0 + P(15 < D \leqslant 60) \times 3,5 + P(60 < D \leqslant 120) \times (3,5 + t) + P(120 < D \leqslant 180) \times (3,5 + 2t) \\ &= 0,3361 \times 3,5 + 0,5828 \times (3,5 + t) + 0,0477 \times (3,5 + 2t) = 3,38065 + 0,6782t. \end{aligned}$$

Par suite,

$$E(G) = 5 \Leftrightarrow 3,38065 + 0,6782t = 5 \Leftrightarrow t = \frac{5 - 3,38065}{0,6782} \Leftrightarrow t = 2,387\ldots.$$

En fixant le tarif de l'heure supplémentaire à $2,4$ euros, le prix moyen de stationnement sera au moins de 5 euros.

Partie C

L'énoncé donne $\mu' = 30$ et $P(T' \leqslant 37) = 0,75$. Or $T' \leqslant 37 \Leftrightarrow T' - 30 \leqslant 7 \Leftrightarrow \frac{T' - 30}{\sigma'} \leqslant \frac{7}{\sigma'}$ et donc $P\left(\frac{T' - 30}{\sigma'} \leqslant \frac{7}{\sigma'}\right) = 0,75$. La variable $\frac{T' - 30}{\sigma'}$ suit la loi centrée réduite et la calculatrice fournit $\frac{7}{\sigma'} = 0,67448\ldots$ puis $\sigma' = 10,4$ arrondi à 10^{-1}.

La calculatrice fournit encore $P\left(10 \leqslant T' \leqslant 50\right) = 94,5\%$ et on peut considérer que l'objectif est pratiquement atteint.

EXERCICE 3

Soit $k \in]0, +\infty[$. La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_k'(x) = 1 - ke^{-x}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_k'(x) > 0 &\Leftrightarrow 1 - ke^{-x} > 0 \Leftrightarrow -ke^{-x} > -1 \Leftrightarrow e^{-x} < \frac{-1}{-k} \text{ (car } -k < 0) \\ &\Leftrightarrow e^{-x} < \frac{1}{k} \Leftrightarrow \ln\left(e^{-x}\right) < \ln\left(\frac{1}{k}\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow -x < -\ln(k) \Leftrightarrow x > \ln(k). \end{aligned}$$

De même, $f_k'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \ln(k)$ et $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln(k)$. Ainsi, la fonction f_k' est strictement négative sur $]-\infty, \ln(k)[$ et strictement positive sur $]\ln(k), +\infty[$. On en déduit que la fonction f_k est strictement décroissante sur $]-\infty, \ln(k)]$ et strictement croissante sur $[\ln(k), +\infty[$.

La fonction f_k admet un minimum en le réel $\ln(k)$. Puisque

$$f_k(\ln(k)) = \ln(k) + ke^{-\ln(k)} = \ln(k) + \frac{k}{e^{\ln(k)}} = \ln(k) + \frac{k}{k} = \ln(k) + 1,$$

le point A_k a pour coordonnées $(\ln(k), \ln(k) + 1)$. Mais alors, tous les points A_k, $k > 0$, appartiennent à la droite Δ d'équation $y = x + 1$.

On a montré que les points A_k, $k > 0$, sont alignés.

EXERCICE 4.

1) a) Tableau complété.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	5	3	4	0	9	6	3	1
$2a_{2k+1}$	10	6	8	0	18	12	6	2
R	1	6	8	0	0	3	6	2
I	1	7	15	15	15	18	24	26

La valeur finale de la variable I est 26.

b) La valeur finale de P est $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} + a_{14} = 6+5+0+2+5+1+4 = 23$. La somme $I+P+c$ est alors $26+23+1 = 50$. Cette somme est divisible par 10 et donc le numéro de carte est correct.

c) La valeur finale de I est augmentée de 2 et passe à 28. P la valeur de P était 23 est devient $23 - a_2 + a = 17 + a$. La nouvelle somme $I+P+c$ est $28+17+a+1 = 36+a$. Puisque $0 \leqslant a \leqslant 9$, $36 \leqslant 36+a \leqslant 45$ et donc $36+a$ est un multiple de 10 si et seulement si $36+a = 40$ou encore $a = 4$.

2) $I+P$ est un certain entier naturel N. Puisque $0 \leqslant c \leqslant 9$, $N \leqslant I+P+c \leqslant N+9$. Les entiers de N à $N+9$ sont 10 entiers consécutifs. Par mi ces dix entiers consécutifs, un en un seul est un multiple de 10 et il y a donc une clé c et une seule telle que $I+P+c$ soit un multiple de 10.

Finalement, il existe une et une seule clé rendant le numéro de carte correct.

3) Supposons que les 16 chiffres soient égaux à a (y compris la clé c) où a est un chiffre donné entre 0 et 9. On note r le reste de la division euclidienne de a par 9. On obtient le tableau suivant

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	0	2	4	6	8	1	3	5	7	0
$I = 8r$	0	16	32	48	64	8	24	40	56	0
$P = 7a$	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$I+P+c = 8r+8a$	0	24	48	72	96	48	72	96	120	72

Exactement deux numéros ayant les mêmes chiffres sont corrects : le numéro n'ayant que des 0 et le numéro n'ayant que des 8.

4) 1er cas. On suppose que le chiffre 1 porte un numéro pair et que le chiffre avec lequel il a été permuté est un certain chiffre a. Après permutation, 1 porte un numéro impair et a porte un numéro pair. On note r le reste de la division euclidienne de $2a$ par 9.
On note I et P les nombres à calculer avant permutation. Après permutation, I est remplacé par $I - r + 2$ et P est remplacé par $P - 1 + a$. $I+P+c$ est alors remplacé par $I+P+c+a-r+1$.

2 ème cas. On suppose que le chiffre 1 porte un numéro impair et que le chiffre avec lequel il a été permuté est un certain chiffre a. Après permutation, 1 porte un numéro pair et a porte un numéro impair.
Après permutation, I est remplacé par $I - 2 + r$ et P est remplacé par $P + 1 - a$. $I+P+c$ est alors remplacé par $I+P+c-a+r-1$.

Dans les deux cas, le numéro de carte reste correct si et seulement si l'entier relatif $N = a - r + 1$ est un multiple de 10.

- Si $a = 0$, $N = 1$.
- Si $a = 1$, $N = 1-2+1 = 0$.
- Si $a = 2$, $N = 2-4+1 = -1$.
- Si $a = 3$, $N = 3-6+1 = -2$.
- Si $a = 4$, $N = 4-8+1 = -3$.
- Si $a = 5$, $N = 5-1+1 = 5$.
- Si $a = 6$, $N = 6-3+1 = 4$.
- Si $a = 7$, $N = 7-5+1 = 3$.
- Si $a = 8$, $N = 8-7+1 = 2$.
- Si $a = 9$, $N = 9-0+1 = 10$.

Il y a deux situations où le numéro reste correct, à savoir $a = 1$ et $a = 8$. On ne peut donc pas déterminer avec certitude l'autre chiffre permuté.

