France métropolitaine 2017. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Pour tout réel $x > 0$, $h(x) = xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x} = \dfrac{1}{e^x/x}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x/x} = 0$.

2) La fonction h est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x,

$$h'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times \left(-e^{-x}\right) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x).$$

Pour tout réel positif x, $e^{-x} > 0$ et donc $h'(x)$ est du signe de $1 - x$. On en déduit le tableau de variations de la fonction h.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

3) a) Pour tout réel positif x, $h'(x) = e^{-x}(1 - x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x} - h(x)$ et donc $h(x) = e^{-x} - h'(x)$.

b) Une primitive sur $[0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est la fonction $x \mapsto -e^{-x}$.

c) Une primitive sur $[0, +\infty[$ de la fonction h' est la fonction h et donc, d'après la question a), une primitive H de la fonction h sur $[0, +\infty[$ est la fonction définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par

$$H(x) = -e^{-x} - h(x) = -e^{-x} - xe^{-x} = -(x + 1)e^{-x}.$$

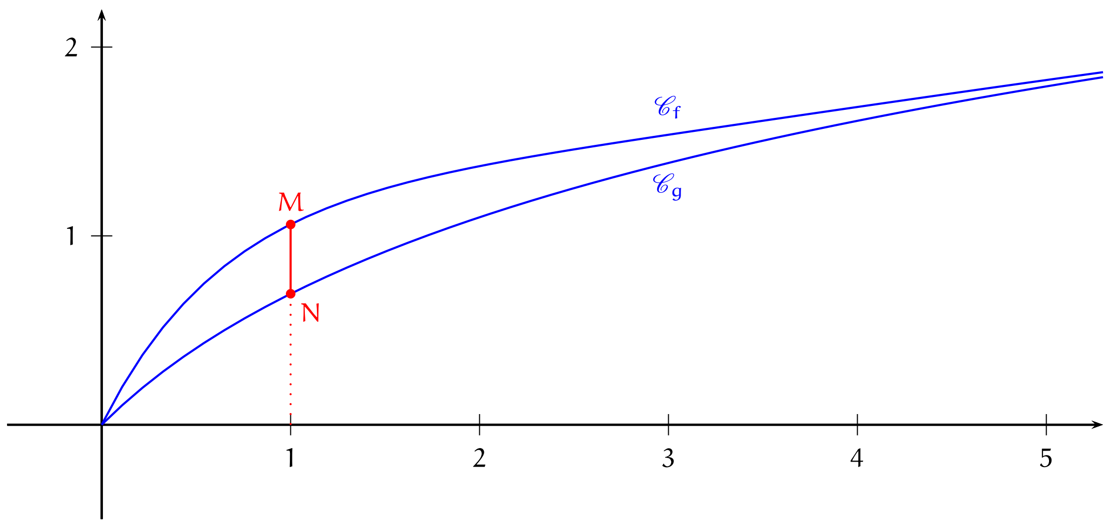
Partie B

1) a) Pour $x \geqslant 0$, $y_M - y_N = f(x) - g(x) = xe^{-x} \geqslant 0$. Donc, pour $x \geqslant 0$,

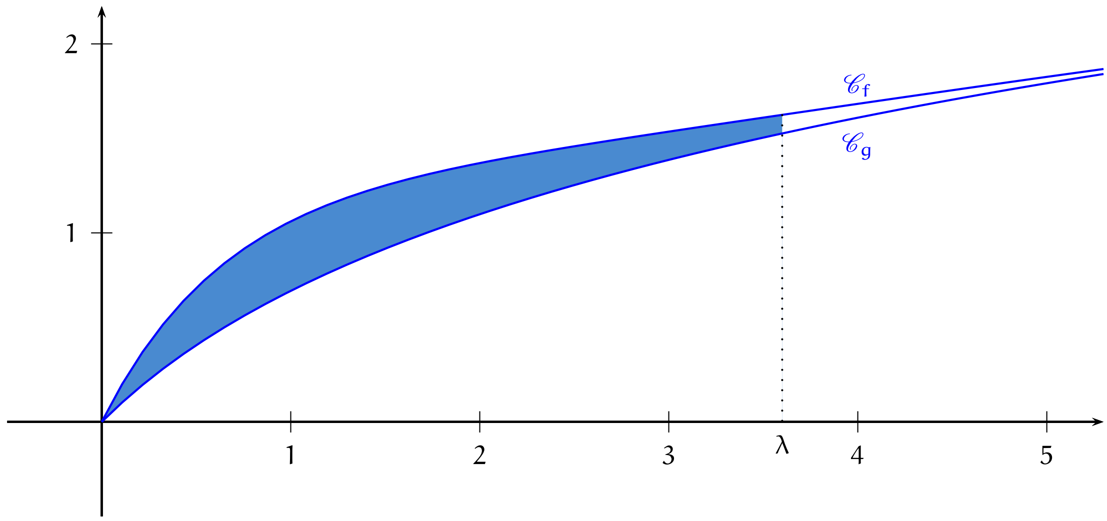
$$MN = |y_N - y_M| = y_M - y_N = xe^{-x} = h(x).$$

D'après la partie A, la distance MN est maximale pour $x = 1$ et cette distance maximale est $h(1) = \dfrac{1}{e}$.

b) Graphique.



2) a) Graphique.



b) Soit $\lambda \geqslant 0$. Pour tout réel x de $[0, \lambda]$, $f(x) - g(x) \geqslant 0$ et donc, d'après la question 3.c) de la partie A,

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \int_0^\lambda (f(x) - g(x))\ dx = \int_0^\lambda h(x)\ dx = [H(x)]_0^\lambda = \left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^\lambda \\ &= \left(-(\lambda+1)e^{-\lambda}\right) - \left(-(0+1)e^0\right) = -(\lambda+1)e^{-\lambda} + 1 \\ &= 1 - \frac{\lambda+1}{e^\lambda}. \end{aligned}$$

c) Pour tout $\lambda \geqslant 0$, $A_\lambda = 1 - \frac{\lambda}{e^\lambda} - \frac{1}{e^\lambda} = 1 - h(\lambda) - e^{-\lambda}$. $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} h(\lambda) = 0$ d'après la question 1 de la partie A et d'autre part, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. Donc,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda = 1 - 0 - 0 = 1.$$

Ceci signifie que l'aire du domaine infini du plan compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ a une aire égale à 1.

3) a) La calculatrice fournit $A_\lambda < 0,8$ pour $\lambda \in \{0, 1, 2\}$ et $A_3 = 1 - \frac{4}{e^3} = 0,8008\ldots$ et donc $A_3 \geqslant 0,8$. L'algorithme affiche donc 3.

b) L'algorithme affiche la première valeur entière de λ pour laquelle $A_\lambda \geqslant S$, S étant un réel strictement compris entre 0 et 1 donné.

EXERCICE 2

1) Soient a un réel puis A le point de coordonnées $\left(1, a, a^2\right)$.

$$2x_A - z_A - 3 = 2 - a^2 - 3 = -1 - a^2.$$

$2x_A - z_A - 3$ est un réel strictement négatif et en particulier, $2x_A - z_A - 3 \neq 0$. On en déduit que le point A n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$.

2) a) Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(2, 0, -1)$. La droite $\mathscr{D}$ est la droite passant par $A\left(1, a, a^2\right)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(2, 0, -1)$. Une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = a \\ z = a^2 - t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

b) Soit $M\left(1 + 2t, a, a^2 - t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}$.

$$AM = \sqrt{(1 + 2t - 1)^2 + (a - a)^2 + (a^2 - t - a^2)^2} = \sqrt{5t^2} = \sqrt{5}|t|.$$

3) Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminons les coordonnées du point H. Soit $M\left(1 + 2t, a, a^2 - t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}$.

$$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow 2(1 + 2t) - \left(a^2 - t\right) - 3 = 0 \Leftrightarrow 5t - a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{a^2 + 1}{5}.$$

Le point H est le point de $\mathscr{D}$ associé au paramètre $t_0 = \dfrac{a^2 + 1}{5}$. D'après la question précédente,

$$AH = \sqrt{5}\,|t_0| = \sqrt{5}\frac{a^2 + 1}{5} = \frac{a^2 + 1}{\sqrt{5}}.$$

Cette distance est minimale pour $a = 0$, auquel cas A est le point de coordonnées $(1, 0, 0)$, et la distance minimale est $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

EXERCICE 3

Partie A

1) On a $40 < r < 60$ et $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. La bonne réponse est la réponse C.

2) a) Si $z = 70e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $r = 70$ et $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$. Donc, $60 < r < 80$ et d'autre part, $-\dfrac{\pi}{2} < -\dfrac{\pi}{3} < -\dfrac{\pi}{4}$ ou encore $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < -\dfrac{\pi}{4}$. Donc, le point P d'affixe z appartient au secteur G4.

b) $|z| = 45\left|-\sqrt{3}+i\right| = 45\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2} = 45\sqrt{4} = 90$ puis

$$z = 90\left(-\frac{45\sqrt{3}}{90}+\frac{45}{90}i\right) = 90\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 90\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 90e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

Donc, $r = 90$ et $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$. En particulier, $80 < r < 100$ et $\dfrac{3\pi}{4} < \theta < \pi$. Donc, le point P d'affixe z appartient au secteur D5.

Partie B

1) La calculatrice fournit $P(M < 0) = 0$ à 10^{-3} près. Ceci signifie qu'il n'est pas possible que le module soit un réel strictement négatif. Le modèle choisi reste donc cohérent quand $M < 0$.

2) La calculatrice (ou le cours) fournit $P(40 < M < 60) = P(\mu - 2\sigma < M < \mu + 2\sigma) = 0,954$ arrondi à 10^{-3}.

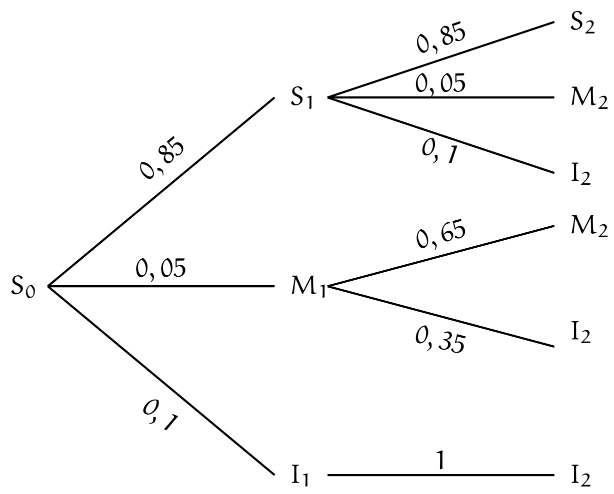
3) Puisque les variables M et T sont indépendantes, la probabilité que la foudre ait frappé le secteur B3 est

$$P\left((40 < M < 60) \cap \left(\frac{\pi}{4} < T < \frac{\pi}{2}\right)\right) = P(40 < M < 60) \times P\left(\frac{\pi}{4} < T < \frac{\pi}{2}\right) = 0,954 \times 0,819 = 0,781 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

EXERCICE 4.

Partie A

1) Arbre complété.



2) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(I_2) &= P(S_1) \times P_{S_1}(I_2) + P(M_1) \times P_{M_1}(I_2) + P(I_1) \times P_{I_1}(I_2) \\ &= 0,85 \times 0,1 + 0,05 \times 0,35 + 0,1 \times 1 = 0,2025. \end{aligned}$$

3) La probabilité demandée est $P_{I_2}(M_1)$.

$$P_{I_2}(M_1) = \frac{P(M_1 \cap I_2)}{P(I_2)} = \frac{P(M_1) \times P_{M_1}(I_2)}{P(I_2)} = \frac{0,05 \times 0,35}{0,2025} = 0,086 \text{ arrondie au millième.}$$

Partie B

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. (S_n, M_n, I_n) est un système complet d'événements et donc $u_n + v_n + w_n = 1$.

2) a) Dans la case C3, on a écrit =0,65*C2+0,05*B2.

b) La valeur du pic épidémique est 4 correspondant à une probabilité maximum d'être malade égale à $0,0859$.

3) a) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} u_{n+1} = P(S_{n+1}) &= P(S_n) \times P_{S_n}(S_{n+1}) + P(M_n) \times P_{M_n}(S_{n+1}) + P(I_n) \times P_{I_n}(S_{n+1}) \\ &= u_n \times 0,85 + v_n \times 0 + w_n \times 0 = 0,85u_n. \end{aligned}$$

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $u_0 = P(S_0) = 1$ et de raison $q = 0,85$. Donc, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = 0,85^n$.

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$.

- $\frac{1}{4}\left(0,85^0 - 0,65^0\right) = \frac{1}{4}(1-1) = 0 = v_0$ et donc l'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $v_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$. Alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 0,65v_n + 0,05u_n \\ &= \frac{0,65}{4}(0,85^n - 0,65^n) + 0,05 \times 0,85^n \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{1}{4}(0,65(0,85^n - 0,65^n) + 0,2 \times 0,85^n) = \frac{1}{4}\left(0,65 \times 0,85^n - 0,65^{n+1} + 0,2 \times 0,85^n\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(0,85 \times 0,85^n - 0,65^{n+1}\right) = \frac{1}{4}\left(0,85^{n+1} - 0,65^{n+1}\right). \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$.

4) Puisque $-1 < 0,65 < 1$ et $-1 < 0,85 < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,65^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,85^n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ puis que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (1 - u_n - v_n) = 1$.

Ainsi, à long terme, la population dans son ensemble sera immunisée contre le virus.

