France métropolitaine 2017. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Pour tout réel $x > 0$, $h(x) = xe^{-x} = \dfrac{x}{e^x} = \dfrac{1}{e^x/x}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x/x} = 0$.

2) La fonction h est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x,

$$h'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times \left(-e^{-x}\right) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x).$$

Pour tout réel positif x, $e^{-x} > 0$ et donc $h'(x)$ est du signe de $1 - x$. On en déduit le tableau de variations de la fonction h.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

3) a) Pour tout réel positif x, $h'(x) = e^{-x}(1-x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x} - h(x)$ et donc $h(x) = e^{-x} - h'(x)$.

b) Une primitive sur $[0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est la fonction $x \mapsto -e^{-x}$.

c) Une primitive sur $[0, +\infty[$ de la fonction h' est la fonction h et donc, d'après la question a), une primitive H de la fonction h sur $[0, +\infty[$ est la fonction définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par

$$H(x) = -e^{-x} - h(x) = -e^{-x} - xe^{-x} = -(x+1)e^{-x}.$$

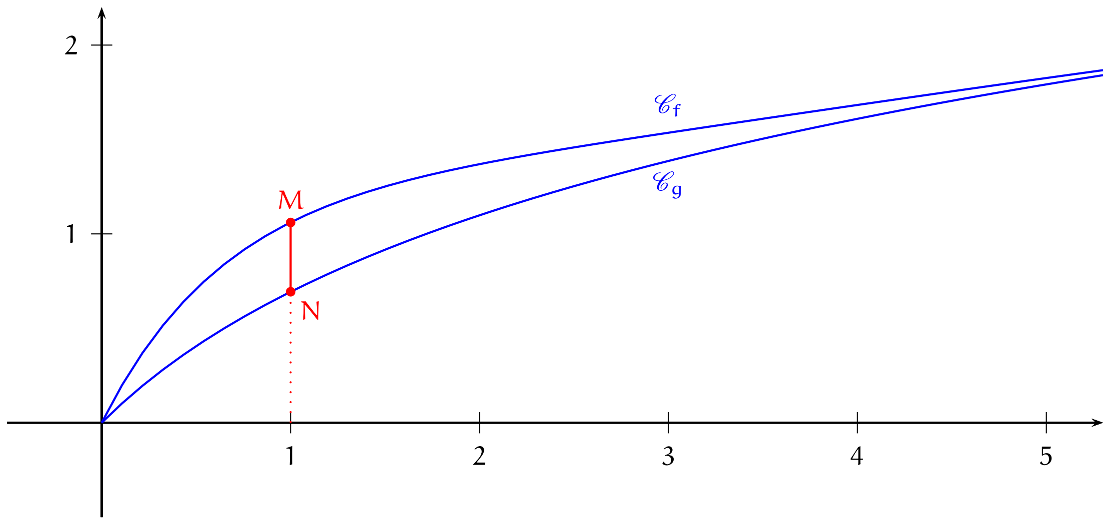
Partie B

1) a) Pour $x \geqslant 0$, $y_M - y_N = f(x) - g(x) = xe^{-x} \geqslant 0$. Donc, pour $x \geqslant 0$,

$$MN = |y_N - y_M| = y_M - y_N = xe^{-x} = h(x).$$

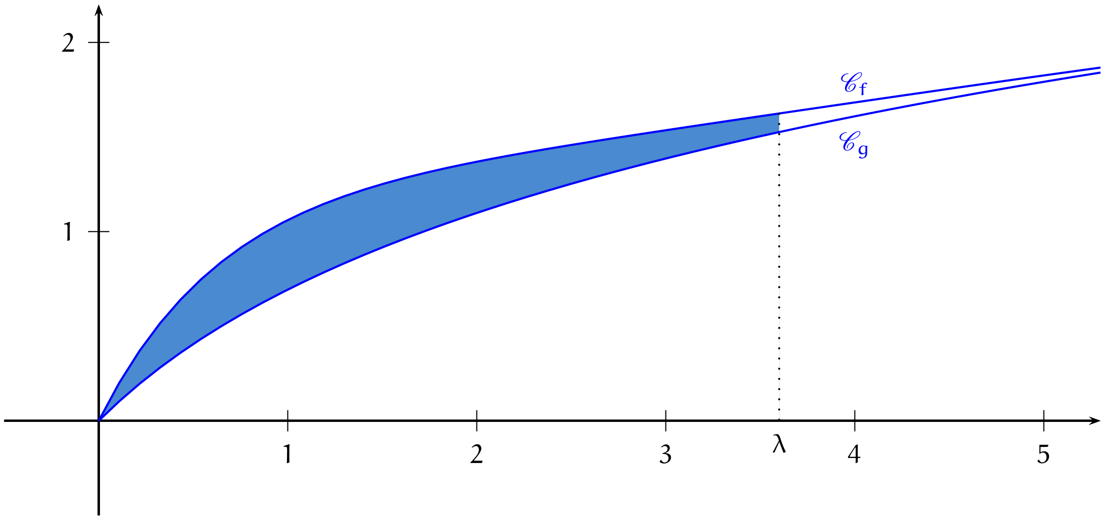
D'après la partie A, la distance MN est maximale pour $x = 1$ et cette distance maximale est $h(1) = \dfrac{1}{e}$.

b) Graphique.



 © Jean-Louis Rouget, 2017. Tous droits réservés.

2) a) Graphique.



b) Soit $\lambda \geqslant 0$. Pour tout réel x de $[0, \lambda]$, $f(x) - g(x) \geqslant 0$ et donc, d'après la question 3.c) de la partie A,

$$\begin{aligned}
A_\lambda &= \int_0^\lambda (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^\lambda h(x)\, dx = [H(x)]_0^\lambda = \left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^\lambda \\
&= \left(-(\lambda+1)e^{-\lambda}\right) - \left(-(0+1)e^0\right) = -(\lambda+1)e^{-\lambda} + 1 \\
&= 1 - \frac{\lambda+1}{e^\lambda}.
\end{aligned}$$

c) Pour tout $\lambda \geqslant 0$, $A_\lambda = 1 - \dfrac{\lambda}{e^\lambda} - \dfrac{1}{e^\lambda} = 1 - h(\lambda) - e^{-\lambda}$. $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} h(\lambda) = 0$ d'après la question 1 de la partie A et d'autre part, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. Donc,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda = 1 - 0 - 0 = 1.$$

Ceci signifie que l'aire du domaine infini du plan compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ a une aire égale à 1.

3) a) La calculatrice fournit $A_\lambda < 0,8$ pour $\lambda \in \{0, 1, 2\}$ et $A_3 = 1 - \dfrac{4}{e^3} = 0,8008\ldots$ et donc $A_3 \geqslant 0,8$. L'algorithme affiche donc 3.

b) L'algorithme affiche la première valeur entière de λ pour laquelle $A_\lambda \geqslant S$, S étant un réel strictement compris entre 0 et 1 donné.

 © Jean-Louis Rouget, 2017. Tous droits réservés.

EXERCICE 2

1) Soient a un réel puis A le point de coordonnées $\left(1, a, a^2\right)$.

$$2x_A - z_A - 3 = 2 - a^2 - 3 = -1 - a^2.$$

$2x_A - z_A - 3$ est un réel strictement négatif et en particulier, $2x_A - z_A - 3 \neq 0$. On en déduit que le point A n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$.

2) a) Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(2, 0, -1)$. La droite $\mathscr{D}$ est la droite passant par $A\left(1, a, a^2\right)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(2, 0, -1)$. Une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = a \\ z = a^2 - t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

b) Soit $M\left(1 + 2t, a, a^2 - t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}$.

$$AM = \sqrt{(1 + 2t - 1)^2 + (a - a)^2 + (a^2 - t - a^2)^2} = \sqrt{5t^2} = \sqrt{5}|t|.$$

3) Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminons les coordonnées du point H. Soit $M\left(1 + 2t, a, a^2 - t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathscr{D}$.

$$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow 2(1 + 2t) - \left(a^2 - t\right) - 3 = 0 \Leftrightarrow 5t - a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{a^2 + 1}{5}.$$

Le point H est le point de $\mathscr{D}$ associé au paramètre $t_0 = \dfrac{a^2 + 1}{5}$. D'après la question précédente,

$$AH = \sqrt{5}\,|t_0| = \sqrt{5}\frac{a^2 + 1}{5} = \frac{a^2 + 1}{\sqrt{5}}.$$

Cette distance est minimale pour $a = 0$, auquel cas A est le point de coordonnées $(1, 0, 0)$, et la distance minimale est $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

 © Jean-Louis Rouget, 2017. Tous droits réservés.

EXERCICE 3

Partie A

1) On a $40 < r < 60$ et $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. La bonne réponse est la réponse C.

2) a) Si $z = 70e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $r = 70$ et $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$. Donc, $60 < r < 80$ et d'autre part, $-\dfrac{\pi}{2} < -\dfrac{\pi}{3} < -\dfrac{\pi}{4}$ ou encore $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < -\dfrac{\pi}{4}$. Donc, le point P d'affixe z appartient au secteur G4.

b) $|z| = 45\left|-\sqrt{3}+i\right| = 45\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 45\sqrt{4} = 90$ puis

$$z = 90\left(-\frac{45\sqrt{3}}{90} + \frac{45}{90}i\right) = 90\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 90\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 90e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

Donc, $r = 90$ et $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$. En particulier, $80 < r < 100$ et $\dfrac{3\pi}{4} < \theta < \pi$. Donc, le point P d'affixe z appartient au secteur D5.

Partie B

1) La calculatrice fournit $P(M < 0) = 0$ à 10^{-3} près. Ceci signifie qu'il n'est pas possible que le module soit un réel strictement négatif. Le modèle choisi reste donc cohérent quand $M < 0$.

2) La calculatrice (ou le cours) fournit $P(40 < M < 60) = P(\mu - 2\sigma < M < \mu + 2\sigma) = 0,954$ arrondi à 10^{-3}.

3) Puisque les variables M et T sont indépendantes, la probabilité que la foudre ait frappé le secteur B3 est

$$P\left((40 < M < 60) \cap \left(\frac{\pi}{4} < T < \frac{\pi}{2}\right)\right) = P(40 < M < 60) \times P\left(\frac{\pi}{4} < T < \frac{\pi}{2}\right) = 0,954 \times 0,819 = 0,781 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2017. Tous droits réservés.

EXERCICE 4.

Partie A

1) Soit (x, y) un couple d'entiers naturels. D'après le théorème de PYTHAGORE et sa réciproque,

$$(x,y) \text{ définit un TRPI} \Leftrightarrow y^2 = x^2 + (x+1)^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2 + x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow y^2 = 2x^2 + 2x + 1.$$

2) Si $x = 1$, alors $2x^2 + 2x + 1 = 2 + 2 + 1 = 5$. 5 n'est pas un carré parfait et donc $x = 1$ ne convient pas.
Si $x = 2$, alors $2x^2 + 2x + 1 = 8 + 4 + 1 = 13$. 13 n'est pas un carré parfait et donc $x = 2$ ne convient pas.
Si $x = 3$, alors $2x^2 + 2x + 1 = 18 + 6 + 1 = 25$. $25 = 5^2$ et donc le TRPI ayant les plus petits côtés est défini par le couple $(3, 5)$.

3) a) Soit n un entier naturel. Si n est pair, $n \equiv 0$ [2] puis $n \times n \equiv 0 \times 0$ [2] ou encore $n^2 \equiv 0$ [2]. Donc, si n est pair, n^2 est pair. Par suite, si n^2 est impair alors n est nécessairement impair.

b) Soit (x, y) un couple d'entiers naturels définissant un TRPI. Alors, $y^2 = 2\left(x^2 + x\right) + 1$. Puisque $x^2 + x$ est un entier naturel, y^2 est un nombre impair. D'après la question précédente, y est nécessairement impair.

4) Soit (x, y) un couple d'entiers naturels définissant un TRPI. Alors, $(-2x - 2)x + y \times y = 1$. Ainsi, il existe deux entiers relatifs u et v, à savoir $u = -2x - 2$ et $v = y$, tels que $ux + vy = 1$. D'après le théorème de BÉZOUT, les entiers x et y sont premiers entre eux.

Partie B

1) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 4x + 3y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y + 1 \\ 4x + 3y + 2 \end{pmatrix}$.

2) a)

$$\begin{aligned}
y'^2 - 2x'(x'+1) &= (4x+3y+2)(4x+3y+2) - 2(3x+2y+1)(3x+2y+2) \\
&= \left(16x^2 + 12xy + 8x + 12xy + 9y^2 + 6y + 8x + 6y + 4\right) \\
&\quad - 2(9x^2 + 6xy + 6x + 6xy + 4y^2 + 4y + 3x + 2y + 2) \\
&= 16x^2 + 24xy + 9y^2 + 16x + 12y + 4 - 18x^2 - 24xy - 8y^2 - 18x - 12y - 4 = -2x^2 + y^2 - 2x \\
&= y^2 - 2x(x+1).
\end{aligned}$$

b) Soit (x, y) un couple d'entiers naturels. Si (x, y) définit un TRPI, alors $y^2 - 2x(x+1) = 1$ d'après la première question de la partie A puis $y'^2 - 2x'(x'+1) = 1$ d'après la question précédente et donc (x', y') définit un TRPI d'après la première question de la partie A.

3) (x_0, y_0) définit un TRPI d'après la question 2 de la partie A.

Soit $n \geqslant 0$. Si (x_n, y_n) définit un TRPI, alors (x_{n+1}, y_{n+1}) définit un TRPI d'après la question précédente.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, (x_n, y_n) définit un TRPI.

4) $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.
$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_0 + 2y_0 + 1 \\ 4x_0 + 3y_0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 3 + 2 \times 5 + 1 \\ 4 \times 3 + 3 \times 5 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 29 \end{pmatrix}$.
$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2y_1 + 1 \\ 4x_1 + 3y_1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 20 + 2 \times 29 + 1 \\ 4 \times 20 + 3 \times 29 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 119 \\ 169 \end{pmatrix}$.
$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2 + 2y_2 + 1 \\ 4x_2 + 3y_2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 119 + 2 \times 169 + 1 \\ 4 \times 119 + 3 \times 169 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 696 \\ 985 \end{pmatrix}$.
$\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_3 + 2y_3 + 1 \\ 4x_3 + 3y_3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 696 + 2 \times 985 + 1 \\ 4 \times 696 + 3 \times 985 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4059 \\ 5741 \end{pmatrix}$.
Le couple $(4059, 5741)$ convient.

 © Jean-Louis Rouget, 2017. Tous droits réservés.