Centres étrangers 2017. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Question 1. Déterminons l'écart-type σ de X. On note que $X \leqslant 170 \Leftrightarrow X - 175 \leqslant -5 \Leftrightarrow \dfrac{X-175}{\sigma} \leqslant -\dfrac{5}{\sigma}$ où de plus la variable $Z = \dfrac{X-175}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite. L'énoncé fournit $P\left(Z \leqslant -\dfrac{5}{\sigma}\right) = 0,02$. La calculatrice fournit $-\dfrac{5}{\sigma} = -2,053\ldots$ puis $\sigma = \dfrac{-5}{-2,053\ldots}$ et donc $\sigma = 2,44$ arrondi à 10^{-2}.

La probabilité demandée est $P(170 \leqslant X \leqslant 180)$. La calculatrice donne $P(170 \leqslant X \leqslant 180) = 0,96$ arrondie au centième. La bonne réponse est la réponse b.

Question 2. Notons X le nombre de bonbons déformés. X suit une loi binomiale. En effet,

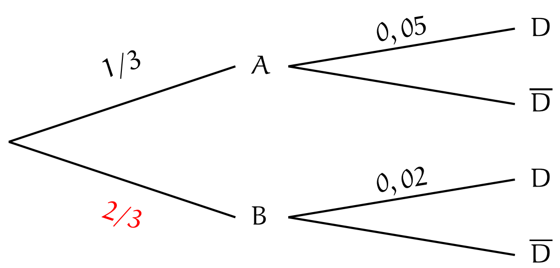
• $n = 50$ expériences identiques et indépendantes (en supposant que le nombre total de bonbons est grand de sorte que la probabilité qu'un bonbon soit déformé ne change pas quand on prélève un bonbon) sont effectuées ;
• chaque expérience a deux éventualités, « le bonbon est déformé » avec une probabilité $p = 0,05$ et « le bonbon n'est pas déformé » avec une probabilité $1 - p = 0,95$.

Ainsi, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,05$. La probabilité demandée est $P(X \geqslant 2)$.

$P(X \geqslant 2) = 1-P(X \leqslant 1) = 1-P(X=0)-P(X=1) = 1-(0,95)^{50}-50\times(0,05)\times(0,95)^{49} = 0,72$ arrondie au centième).

La bonne réponse est la réponse a.

Question 3. Représentons la situation par un arbre de probabilités. En notant A l'événement « le bonbon est produit par la machine A », B l'événement « le bonbon est produit par la machine B » et D l'événement « le bonbon est déformé »,



La probabilité demandée est $P_D(B)$. L'énoncé donne $P(A) = \dfrac{1}{3}$ et donc $P(B) = \dfrac{2}{3}$, $P_A(D) = 0,05$ (fourni à la question 2) et $P_B(D) = 0,02$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) = \frac{1}{3} \times 0,05 + \frac{2}{3} \times 0,02 = \frac{0,09}{3} = 0,03.$$

Mais alors,

$$P_D(B) = \frac{P(D \cap B)}{P(D)} = \frac{P(B) \times P_B(D)}{P(D)} = \frac{\frac{2}{3} \times 0,02}{0,03} = 0,44 \text{ arrondie au centième.}$$

La bonne réponse est la réponse c.

Question 4. On sait que l'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$. L'énoncé donne $\dfrac{1}{\lambda} = 500$ et donc $\lambda = \dfrac{1}{500} = 0,002$. Pour tout réel positif t,

$$P(Y \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^{0}\right) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0,002t}.$$

En particulier, $P(Y \leqslant 300) = 1-e^{-0,002\times 300} = 1-e^{-0,6} = 0,45$ arrondie au centième. La bonne réponse est la réponse a.

Question 5. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ où n est le nombre de personnes interrogées et f est la fréquence des plus de 20 ans. L'amplitude de cet intervalle est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,05 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geqslant \frac{2}{0,05} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geqslant 40 \Leftrightarrow \left(\sqrt{n}\right)^2 \geqslant 40^2 \Leftrightarrow n \geqslant 1600.$$

La bonne réponse est la réponse c.

EXERCICE 2

1) Si $t = 0$, on obtient $x = 2 = x_A$, $y = 3 = y_A$ et $z = 0 = z_A$ dans la représentation paramétrique de d_1. Donc, le point A appartient à la droite d_1.

2) Un vecteur directeur de d_1 est $\overrightarrow{u_1}(1, -1, 1)$ et un vecteur directeur de d_2 est $\overrightarrow{u_2}(2, 1, 0)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

3)

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u_1} = 1 \times 1 + (-2) \times (-1) + (-3) \times 1 = 1 + 2 - 3 = 0$$

et

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u_2} = 1 \times 2 + (-2) \times 1 + (-3) \times 0 = 2 - 2 = 0.$$

Donc, le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

4) a) Soit P' le plan d'équation $5x + 4y - z - 22 = 0$. $5x_A + 4y_A - z_A - 22 = 5 \times 2 + 4 \times 3 - 0 - 22 = 0$ et donc le point A appartient au plan P'.

Un vecteur normal au plan P' est le vecteur $\overrightarrow{n}(5, 4, -1)$.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u_1} = 5 \times 1 + 4 \times (-1) + (-1) \times 1 = 5 - 4 - 1 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{v} = 5 \times 1 + 4 \times (-2) + (-1) \times (-3) = 5 - 8 + 3 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v}$. En résumé, le plan P' est le plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v}$ ou encore $P' = P$. Ainsi, P est le plan d'équation $5x + 4y - z - 22 = 0$.

b) Soit $M'(-5 + 2t', -1 + t', 5)$, $t' \in \mathbb{R}$, un point de la droite d_2.

$$M' \in P \Leftrightarrow 5(-5 + 2t') + 4(-1 + t') - 5 - 22 = 0 \Leftrightarrow 14t' - 56 = 0 \Leftrightarrow t' = 4.$$

$t' = 4$ fournit le point de coordonnées $(3, 3, 5)$ qui est effectivement le point B. La droite d_2 coupe le plan P au point $B(3, 3, 5)$.

5) a) Δ est la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 3 + u \\ y = 3 - 2u \\ z = 5 - 3u \end{array}\right.$, $u \in \mathbb{R}$.

b) Soient $M(2 + t, 3 - t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de d_1 et $N(3 + u, 3 - 2u, 5 - 3u)$, $u \in \mathbb{R}$, un point de Δ.

$$\begin{aligned} M = N &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2 + t = 3 + u \\ 3 - t = 3 - 2u \\ t = 5 - 3u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = u + 1 \\ 3 - (u + 1) = 3 - 2u \\ u + 1 = 5 - 3u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = u + 1 \\ u = 1 \\ u = 1 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 2 \\ u = 1 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Les droites d_1 et Δ sont donc sécantes en le point de coordonnées $(4, 1, 2)$.

c) $\overrightarrow{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ou encore la droite Δ est orthogonale aux droites d_1 et d_2. D'après la question précédente, les droites Δ et d_1 sont sécantes et d'autre part, les droites Δ et d_2 sont sécantes en B. Finalement, la droite Δ est perpendiculaire aux droites d_1 et d_2 ou encore la droite Δ répond au problème posé.

EXERCICE 3

Partie A : administration par voie intraveineuse

1) Soit $t \in [0, +\infty[$.

$$f(t) = \frac{1}{2} \times 20 \Leftrightarrow 20e^{-0,1t} = \frac{1}{2} \times 20 \Leftrightarrow e^{-0,1t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -0,1t = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow -0,1t = -\ln(2) \Leftrightarrow t = \frac{1}{0,1}\ln(2) \Leftrightarrow t = 10\ln(2).$$

Donc, $t_{0,5} = 10\ln(2) = 6,9$ heures arrondi au dixième.

2) Soit $t \in [0, +\infty[$.

$$f(t) \leqslant 0,2 \Leftrightarrow 20e^{-0,1t} \leqslant 0,2 \Leftrightarrow e^{-0,1t} \leqslant 0,01$$
$$\Leftrightarrow -0,1t \leqslant \ln\left(\frac{1}{100}\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[)$$
$$\Leftrightarrow -0,1t \leqslant -\ln(100) \Leftrightarrow t \geqslant \frac{1}{0,1}\ln(100) \Leftrightarrow t \geqslant 10\ln(100).$$

Donc, le médicament est éliminé à partir de $t_e = 10\ln(100) = 46,1$ heures arrondi au dixième.

3) Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^x 20e^{-0,1t}\,dt = 20\left[-\frac{1}{0,1}e^{-0,1t}\right]_0^x = 20\left(\left(-10e^{-0,1x}\right) - \left(-10e^0\right)\right) = 200 - 200e^{-0,1x}.$$

Ensuite, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0,1x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x 20e^{-0,1t}\,dt = 200 - 0 = 200$.

Pour ce modèle, l'ASC est égal à 200 μg.L^{-1}.h.

Partie B : administration par voie orale

1) La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$g'(t) = 20\left((-0,1)e^{-0,1t} - (-1)e^{-t}\right) = 20\left(e^{-t} - 0,1e^{-0,1t}\right) = 20e^{-t}\left(1 - 0,1e^{-0,1t+t}\right) = 20e^{-t}\left(1 - 0,1e^{0,9t}\right).$$

2) Soit $t \geqslant 0$. $20e^{-t} > 0$ et donc

$$g'(t) > 0 \Leftrightarrow 1 - 0,1e^{0,9t} > 0 \Leftrightarrow -0,1e^{0,9t} > -1 \Leftrightarrow e^{0,9t} < \frac{1}{0,1} \Leftrightarrow e^{0,9t} < 10$$
$$\Leftrightarrow 0,9t < \ln(10) \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R})$$
$$\Leftrightarrow t < \frac{1}{0,9}\ln(10) \Leftrightarrow t < \frac{10}{9}\ln(10).$$

De même, $g'(t) < 0$ si et seulement si $t > \frac{10}{9}\ln(10)$ et $g'(t) = 0$ si et seulement si $t = \frac{10}{9}\ln(10)$. La fonction g est donc strictement croissante sur $\left[0, \frac{10}{9}\ln(10)\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{10}{9}\ln(10), +\infty\right[$.

Donc, la concentration est maximale pour $t = \frac{10}{9}\ln(10)$ ou encore $t = 2,5584\ldots$ h ou encore 2 h et $60 \times 0,5584\ldots$ min ou enfin 2 h 34 min arrondi à la minute.

Partie C : administration répétée par voie intraveineuse

1) Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.

- $40 - 40 \times 0,5^1 = 40 - 20 = 20 = u_1$. Donc, l'égalité est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0,5u_n + 20 \\ &= 0,5\left(40 - 40 \times 0,5^n\right) + 20 = 20 - 0,5 \times 40 \times 0,5^n + 20 = 40 - 40 \times 0,5^{n+1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.

2) Puisque $-1 < 0,5 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 40 - 0 = 40$.

3) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} u_n \geqslant 38 &\Leftrightarrow 40 - 40 \times 0,5^n \geqslant 38 \Leftrightarrow -40 \times 0,5^n \geqslant -2 \Leftrightarrow 0,5^n \leqslant \frac{1}{20} \\ &\Leftrightarrow \ln\left(0,5^n\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{20}\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\ &\Leftrightarrow n\ln(0,5) \leqslant -\ln(20) \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant -\ln(20) \Leftrightarrow -n\ln(2) \leqslant -\ln(20) \\ &\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(20)}{\ln(2)} \Leftrightarrow n \geqslant 4,3\ldots \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 5. \end{aligned}$$

Le nombre minimal d'injections pour atteindre l'équilibre est 5.

EXERCICE 4.

Partie A : étude du cas particulier $n = 6$

1) Puisque $OA_6 = OB_6 = r_6$, OA_6B_6 est un triangle isocèle en O. Puisque les 6 triangles sont superposables, l'angle au sommet est $\widehat{A_6OB_6} = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$. Puisque le triangle OA_6B_6 est un triangle isocèle en O, $\widehat{OA_6B_6} = \widehat{OB_6A_6}$ et donc

$$\pi = \widehat{A_6OB_6} + \widehat{OA_6B_6} + \widehat{OB_6A_6} = \frac{\pi}{3} + 2\widehat{OA_6B_6}$$

et donc $\widehat{OA_6B_6} = \dfrac{1}{2}\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. Finalement, $\widehat{A_6OB_6} = \widehat{OA_6B_6} = \widehat{OB_6A_6} = \dfrac{\pi}{3}$ et donc le triangle OA_6B_6 est équilatéral.

Son aire est le sixième de l'aire du polygone P_6 et est donc égale à $\dfrac{1}{6}$.

2) On note H_6 le projeté orthogonal du point B_6 sur la droite (OA_6). Dans le triangle OH_6B_6, rectangle en H_6, on a $\dfrac{H_6B_6}{OB_6} = \sin\left(\widehat{H_6OB_6}\right)$ et donc

$$H_6B_6 = OB_6 \times \sin\left(\widehat{H_6OB_6}\right) = r_6 \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{r_6\sqrt{3}}{2}.$$

3) L'aire $\mathscr{A}_6$ du triangle OA_6B_6 est

$$\mathscr{A}_6 = \frac{OA_6 \times H_6B_6}{2} = \frac{r_6 \times \dfrac{r_6\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{r_6^2\sqrt{3}}{4}.$$

Par suite,

$$\mathscr{A}_6 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{r_6^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow r_6^2 = \frac{4}{6\sqrt{3}} \Leftrightarrow r_6^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow r_6 = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}.$$

On a montré que $r_6 = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$.

Partie B : cas général avec $n \geqslant 4$

1) On note H_n le projeté orthogonal du point B_n sur la droite (OA_n). Dans le triangle OH_nB_n, rectangle en H_n, on a $\dfrac{H_nB_n}{OB_n} = \sin\left(\widehat{H_nOB_n}\right)$ et donc

$$H_nB_n = OB_n \times \sin\left(\widehat{H_nOB_n}\right) = r_n \sin(\theta_n).$$

L'aire $\mathscr{A}_n$ du triangle OA_nB_n est

$$\mathscr{A}_n = \frac{OA_n \times H_nB_n}{2} = \frac{r_n \times r_n \sin(\theta_n)}{2} = \frac{r_n^2 \sin(\theta_n)}{2}.$$

2) Puisque les n triangles sont superposables, l'aire $\mathscr{A}_n$ du polygone P_n est égale à $\dfrac{1}{n}$ et l'angle θ_n est égal à $\dfrac{2\pi}{n}$. Ensuite,

$$\mathscr{A}_n = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{r_n^2 \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}{2} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow r_n^2 = \frac{2}{n \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}.$$

Enfin, $\theta_n \in]0, \pi[$ et donc $\sin(\theta_n) > 0$ puis

$$r_n = \sqrt{\frac{2}{n \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}.$$

Partie C : étude de la suite (r_n)

1) Soit $n \geqslant 4$. Alors, $0 < n < n+1$ et donc $0 < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{4}$. On en déduit que $0 < \dfrac{2\pi}{n+1} < \dfrac{2\pi}{n} \leqslant \dfrac{2\pi}{4} < \pi$. Puisque la fonction f est décroissante sur $]0, \pi[$, on en déduit que $f\left(\dfrac{2\pi}{n+1}\right) < f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ puis que $\dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n+1}\right) < \dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ et finalement $\sqrt{\dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n+1}\right)} < \sqrt{\dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}$ par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$.

Finalement, pour tout $n \geqslant 4$, $r_{n+1} < r_n$ et donc la suite $(r_n)_{n\geqslant 4}$ est strictement décroissante.

2) La suite $(r_n)_{n\geqslant 4}$ est décroissante et minorée par 0. Donc, la suite $(r_n)_{n\geqslant 4}$ converge vers un certain réel positif ou nul L.

3) L'algorithme affiche la première valeur de n à partir de laquelle on a $r_n \leqslant 0,58$.

