

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse exacte.

Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapportent aucun point.

On étudie la production d'une usine qui fabrique des bonbons, conditionnés en sachets.

On choisit un sachet au hasard dans la production journalière. La masse de ce sachet, exprimée en gramme, est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 175$. De plus, une observation statistique a montré que 2 % des sachets ont une masse inférieure ou égale à 170 g, ce qui se traduit dans le modèle considéré par : $P(X \leq 170) = 0,02$.

Question 1 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de l'évènement « la masse du sachet est comprise entre 170 et 180 grammes » ?

Réponse a : 0,04 **Réponse b :** 0,96

Réponse c : 0,98 **Réponse d :** On ne peut pas répondre car il manque des données.

Les différents bonbons présents dans les sachets sont tous enrobés d'une couche de cire comestible. Ce procédé, qui déforme certains bonbons, est effectué par deux machines A et B.

Lorsqu'il est produit par la machine A, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à 0,05.

Question 2 : Sur un échantillon aléatoire de 50 bonbons issus de la machine A, quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'au moins 2 bonbons soient déformés ?

Réponse a : 0,72 **Réponse b :** 0,28

Réponse c : 0,54 **Réponse d :** On ne peut pas répondre car il manque des données

La machine A produit un tiers des bonbons de l'usine. Le reste de la production est assuré par la machine B. Lorsqu'il est produit par la machine B, la probabilité qu'un bonbon prélevé aléatoirement soit déformé est égale à 0,02.

Dans un test de contrôle, on prélève au hasard un bonbon dans l'ensemble de la production. Celui-ci est déformé.

Question 3 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, qu'il soit produit par la machine B ?

Réponse a : 0,02 **Réponse b :** 0,67

Réponse c : 0,44 **Réponse d :** 0,01

La durée de vie de fonctionnement, exprimée en jour, d'une machine servant à l'enrobage, est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle dont l'espérance est égale à 500 jours.

Question 4 : Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que la durée de fonctionnement de la machine soit inférieure ou égale à 300 jours ?

Réponse a : 0,45 **Réponse b :** 1

Réponse c : 0,55 **Réponse d :** On ne peut pas répondre car il manque des données

L'entreprise souhaite estimer la proportion de personnes de plus de 20 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 %, avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05. Elle interroge pour cela un échantillon aléatoire de clients.

Question 5 : Quel est le nombre minimal de clients à interroger ?

Réponse a : 40 **Réponse b :** 400

Réponse c : 1600 **Réponse d :** 20

EXERCICE 2 (4 points)

(commun à tous les candidats)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.

Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites.

- 1) Vérifier que le point $A(2 ; 3 ; 0)$ appartient à la droite d_1 .
- 2) Donner un vecteur directeur \vec{u}_1 de la droite d_1 et un vecteur directeur \vec{u}_2 de la droite d_2 .
Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?
- 3) Vérifier que le vecteur $\vec{v}(1 ; -2 ; -3)$ est orthogonal aux vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 .
- 4) Soit P le plan passant par le point A , et dirigé par les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{v} .
On étudie dans cette question l'intersection de la droite d_2 et du plan P .
 - a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $5x + 4y - z - 22 = 0$.
 - b) Montrer que la droite d_2 coupe le plan P au point $B(3 ; 3 ; 5)$.
- 5) On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v}(1 ; -2 ; -3)$, et passant par le point $B(3 ; 3 ; 5)$.
 - a) Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ .
 - b) Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.
 - c) Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.

EXERCICE 3 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-à-dire sa concentration dans le plasma.

On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.

Partie A : administration par voie intraveineuse

On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre ($\mu\text{g.L}^{-1}$), du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.

Le modèle mathématique est : $f(t) = 20e^{-0,1t}$, avec $t \in [0 ; +\infty[$.

La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20 \mu\text{g.L}^{-1}$.

1) La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.

Déterminer cette demi-vie, notée $t_{0,5}$.

2) On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à $0,2 \mu\text{g.L}^{-1}$.

Déterminer le temps à partir duquel le médicament est éliminé. On donnera le résultat arrondi au dixième.

3) En pharmacocinétique, on appelle ASC (ou « aire sous la courbe »), en $\mu\text{g.L}^{-1}$, le nombre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt.$$

Vérifier que pour ce modèle, l'ASC est égal à $200 \mu\text{g.L}^{-1} \cdot \text{h}$.

Partie B : administration par voie orale

On note $g(t)$ la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre ($\mu\text{g.L}^{-1}$), au bout de t heures après ingestion par voie orale.

Le modèle mathématique est : $g(t) = 20(e^{-0,1t} - e^{-t})$, avec $t \in [0 ; +\infty[$.

Dans ce cas, l'effet du médicament est retardé, puisque la concentration plasmatique initiale est égale à : $g(0) = 0 \mu\text{g.L}^{-1}$.

1) Démontrer que, pour tout t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a :

$$g'(t) = 20e^{-t} (1 - 0,1e^{0,9t}).$$

2) Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. (On ne demande pas la limite en $+\infty$.)

En déduire la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale. On donnera le résultat à la minute près.

Partie C : administration répétée par voie intraveineuse

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament par voie intraveineuse. L'intervalle de temps (en heure) entre deux injections est choisi égal à la demi-vie du médicament, c'est-à-dire au nombre $t_{0,5}$ qui a été calculé en A - 1.

Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de $20 \mu\text{g.L}^{-1}$.

On note u_n la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n -ième injection. Ainsi, $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0,5u_n + 20$. On remarque qu'avec ce modèle, la concentration initiale du médicament après la première injection, soit $20\mu\text{g.L}^{-1}$, est analogue à celle donnée par le modèle de la partie A, soit $f(0)$.

- 1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.
- 2) Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
- 3) On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse $38 \mu\text{g.L}^{-1}$. Déterminer le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre.

EXERCICE 4 (5 points)

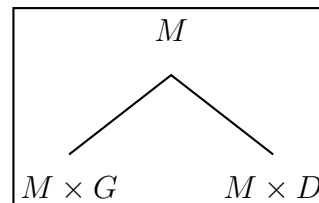
(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

L'arbre de Stern-Brocot a été découvert séparément par le mathématicien allemand Moritz Abraham Stern (1858) et par Achille Brocot (1861), horloger français qui l'a utilisé pour concevoir des systèmes d'engrenages avec un rapport entre rouages proche d'une valeur souhaitée.

Cet exercice aborde la méthode avec des matrices carrées.

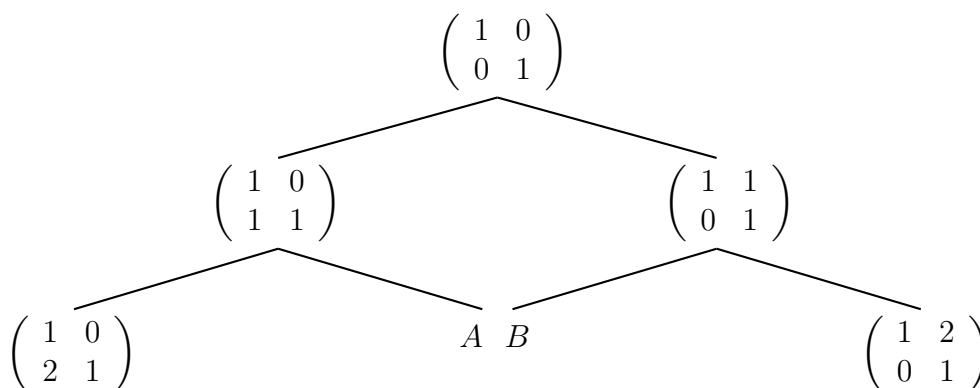
On considère les deux matrices $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On construit un arbre descendant à partir d'une matrice initiale, de la façon suivante : de chaque matrice carrée M de l'arbre partent deux nouvelles branches vers les deux autres matrices $M \times G$ (à gauche) et $M \times D$ (à droite). Ces deux nouvelles matrices sont appelées les matrices filles de M .



Dans la méthode considérée, on prend comme matrice initiale la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les deux matrices manquantes A et B , dans la troisième ligne de l'arbre de Stern-Brocot ci-dessous.



Dans la suite de l'exercice, on admet que pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot, les nombres a, b, c, d sont des entiers vérifiant : $b + d \neq 0$.

2) On associe à une matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de l'arbre de Stern-Brocot la fraction $\frac{a+c}{b+d}$.

Montrer que, dans cette association, le trajet « gauche-droite-gauche » à partir de la matrice initiale dans l'arbre, aboutit à une matrice correspondant à la fraction $\frac{3}{5}$.

3) Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de l'arbre. On rappelle que a, b, c, d sont des entiers.

On note $\Delta_M = ad - bc$, la différence des produits diagonaux de cette matrice.

a) Montrer que si $ad - bc = 1$, alors $d(a+c) - c(b+d) = 1$.

b) En déduire que si $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est une matrice de l'arbre de Stern-Brocot telle que

$\Delta_M = ad - bc = 1$, alors $\Delta_{M \times G} = 1$, c'est-à-dire que la différence des produits diagonaux de la matrice $M \times G$ est aussi égale à 1.

On admet de même que $\Delta_{M \times D} = 1$, et que toutes les autres matrices N de l'arbre de Stern-Brocot vérifient l'égalité $\Delta_N = 1$.

4) Déduire de la question précédente que toute fraction associée à une matrice de l'arbre de Stern-Brocot est irréductible.

5) Soit m et n deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Ainsi la fraction $\frac{m}{n}$ est irréductible. On considère l'algorithme suivant.

VARIABLES : m et n sont des entiers naturels non nuls et premiers entre eux
 TRAITEMENT : Tant que $m \neq n$, faire
 Si $m < n$
 Afficher « Gauche »
 n prend la valeur $n - m$
 Sinon
 Afficher « Droite »
 m prend la valeur $m - n$

a) Recopier et compléter le tableau suivant, indiquer ce qu'affiche l'algorithme lorsqu'on le fait fonctionner avec les valeurs $m = 4$ et $n = 7$.

Affichage		Gauche
m	4
n	7

b) Conjecturer le rôle de cet algorithme. Vérifier par un calcul matriciel le résultat fourni avec les valeurs $m = 4$ et $n = 7$.