Session 2017

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Spécifique

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - e^{-\frac{a}{80}t}\right)$$

où

C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre,
t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure,
d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure,
a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.
Le paramètre a est spécifique à chaque patient.

En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C.

Partie A : étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.
Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$C(t) = 12\left(1 - e^{-\frac{7}{80}t}\right).$$

1) Étudier le sens de variation de la fonction C sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2) Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

Partie B : étude de fonctions

1) Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{105}{x}\left(1 - e^{-\frac{3}{40}x}\right).$$

Démontrer que, pour tout réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{105g(x)}{x^2}$, ou g est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = -\frac{3x}{40}e^{-\frac{3}{40}x} + e^{-\frac{3}{40}x} - 1.$$

2) On donne le tableau de variation de la fonction g :

x	0	$+\infty$
f	0 ↘	-1

En déduire le sens de variation de la fonction f.
On ne demande pas les limites de la fonction f.

3) Montrer que l'équation $f(x) = 5,9$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\ ;\ 80]$.
En déduire que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est-à-dire au plateau d'être égal à 15.
Au préalable, il faut pouvoir déterminer la clairance a de ce patient. À cette fin, on règle provisoirement le débit d à 105, avant de calculer le débit qui rende le traitement efficace.
On rappelle que la fonction C est définie sur l' intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - e^{-\frac{a}{80}t}\right).$$

1) On cherche à déterminer la clairance a d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 105.

a) Exprimer en fonction de a la concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion.

b) Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang ; elle est égale à $5,9$ micromoles par litre.
Déterminer une valeur approchée, au dixième de litre par heure, de la clairance de ce patient.

2) Déterminer la valeur du débit d de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement.

EXERCICE 2 (3 points)

(Commun à tous les candidats)

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \\ u_{n+1} & = & \left(\dfrac{n+1}{2n+4}\right) u_n. \end{array}\right. .$$

On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = (n+1)u_n$.

1) La feuille de calcul ci-contre présente les valeurs des premiers termes des suites (u_n) et (v_n), arrondies au cent-millième.
Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) ?

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	1,000 00	1,000 00
3	1	0,250 00	0,500 00
4	2	0,083 33	0,250 00
5	3	0,031 25	0,125 00
6	4	0,012 50	0,062 50
7	5	0,005 21	0,031 25
8	6	0,002 23	0,015 63
9	7	0,000 98	0,007 81
10	8	0,000 43	0,003 91
11	9	0,000 20	0,001 95

2) a) Conjecturer l'expression de v_n en fonction de n.

b) Démontrer cette conjecture.

3) Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3 (4 points)

(Commun à tous les candidats)

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1) On dispose de deux dés, identiques d'aspect, dont l'un est truqué de sorte que le 6 apparait avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$. On prend un des deux dés au hasard, on le lance, et on obtient 6.

Affirmation 1 : la probabilité que le dé lancé soit le dé truqué est égale à $\dfrac{2}{3}$.

2) Dans le plan complexe, on considère les points M et N d'affixes respectives $z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_N = \dfrac{3-i}{2+i}$.

Affirmation 2 : la droite (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées.

Dans les questions **3)** et **4)**, on se place dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace et l'on considère la droite d dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{l} x = 1+t \\ y = 2 \\ z = 3+2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$.

3) On considère les points A, B et C avec $A(-2\ ;\ 2\ ;\ 3)$, $B(0\ ;\ 1\ ;\ 2)$ et $C(4\ ;\ 2\ ;\ 0)$.
On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Affirmation 3 : la droite d est orthogonale au plan (ABC).
Affirmation 4 : la droite d et la droite Δ ne sont pas coplanaires.

EXERCICE 4 (3 points)

(Commun à tous les candidats)

L'objet du problème est l'étude des intégrales I et J définies par :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Partie A : valeur exacte de l'intégrale I

1) Donner une interprétation géométrique de l'intégrale I.

2) Calculer la valeur exacte de I.

Partie B : estimation de la valeur J

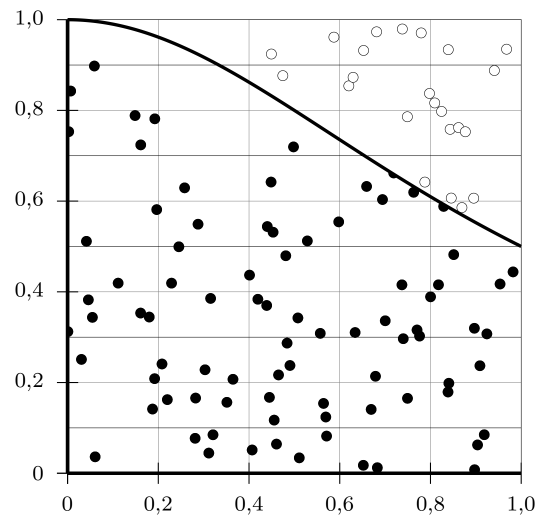
Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On a donc : $J = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$.
Le but de cette partie est d'évaluer l'intégrale J à l'aide de la méthode probabiliste décrite ci-après.
On choisit au hasard un point $M(x\ ;\ y)$ en tirant de façon indépendante ses coordonnées x et y au hasard selon la loi uniforme sur $[0\ ;\ 1]$.
On admet que la probabilité p qu'un point tiré de cette manière soit situé sous la courbe $\mathscr{C}_g$ est égale à l'intégrale J.
En pratique, on initialise un compteur c à 0, on fixe un entier naturel n et on répète n fois le processus suivant :

- on choisit au hasard et indépendamment deux nombres x et y, selon la loi uniforme sur $[0\ ;\ 1]$;
- si $M(x\ ;\ y)$ est au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$ on incrémente le compteur c de 1.

On admet que $f = \dfrac{c}{n}$ est une valeur approchée de J. *C'est le principe de la méthode dite de Monte-Carlo.*

La figure ci-contre illustre la méthode présentée pour $n = 100$.
100 points ont été placés aléatoirement dans le carré.
Les disques noirs correspondent aux points sous la courbe, les disques blancs aux points au-dessus de la courbe.
Le rapport du nombre de disques noirs par le nombre total de disques donne une estimation de l'aire sous la courbe.

Illustration de la méthode avec $n = 100$



1) Recopier et compléter l'algorithme ci-après pour qu'il affiche une valeur approchée de J.

Variables	n, c, f, i, x, y sont des nombres

Traitement	Lire la valeur de n
	c prend la valeur ...
	Pour i allant de 1 à ... faire
	    x prend une valeur aléatoire entre 0 et 1
	    y prend ...
	    Si ... alors
	        ... prend la valeur ...
	    Fin si
	Fin pour
	f prend la valeur ...

Sortie	Afficher f

2) Pour $n = 1\ 000$, l'algorithme ci-dessus a donné pour résultat : $f = 0,781$.
Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la valeur exacte de J.

3) Quelle doit-être, au minimum, la valeur de n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à $0,02$?

EXERCICE 5 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Question préliminaire.

Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, où λ désigne un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout réel a positif, on a : $P(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt$.

Démontrer que, pour tout réel a positif, $P(T > a) = e^{-\lambda t}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère des lampes à led dont la durée de vie, exprimée en jour, est modélisée par une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{2\,800}$.

Les durées seront données au jour près, et les probabilités au millième près

Partie A : étude d'un exemple

1) Calculer la probabilité qu'une lampe fonctionne au moins 180 jours.

2) Sachant qu'une telle lampe a déjà fonctionné 180 jours, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore au moins 180 jours ?

Partie B : contrôle de la durée de vie moyenne

Le fabricant de ces lampes affirme que, dans sa production, la proportion de lampes qui ont une durée de vie supérieure à 180 heures est de 94 %.

Un laboratoire indépendant qui doit vérifier cette affirmation fait fonctionner un échantillon aléatoire de 400 lampes pendant 180 jours.

On suppose que les lampes tombent en panne indépendamment les unes des autres.

Au bout de ces 180 jours, 32 de ces lampes sont en panne.

Au vu des résultats des tests, peut-on remettre en cause, au seuil de 95 %, la proportion annoncée par le fabricant ?

Partie C : dans une salle de spectacle

Pour éclairer une salle de spectacle, on installe dans le plafond 500 lampes à led.

On modélise le nombre de lampes fonctionnelles après 1 an par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 440$ et d'écart-type $\sigma = 7,3$.

1) Calculer $P(X > 445)$, la probabilité que plus de 445 lampes soient encore fonctionnelles après un an.

2) Lors de l'installation des lampes dans le plafond, la direction de la salle veut constituer un stock de lampes.

Quelle doit-être la taille minimale de ce stock pour que la probabilité de pouvoir changer toutes les lampes défectueuses, après un an, soit supérieure à 95 % ?