Session 2017

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Spécifique

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (3 points)

(Commun à tous les candidats)

On munit le plan d'un repère orthonormé direct. On considère l'équation :

$$(E)\ :\ z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1) Donner une solution entière de (E).

2) Démontrer que, pour tout nombre complexe z,

$$z^4 + 2z^3 - z - 2 = \left(z^2 + z - 2\right)\left(z^2 + z + 1\right).$$

3) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

4) Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de quatre points A, B, C, D du plan complexe tels que $ABCD$ est un quadrilatère non croisé.
Le quadrilatère $ABCD$ est-il un losange ? Justifier.

EXERCICE 2 (4 points)

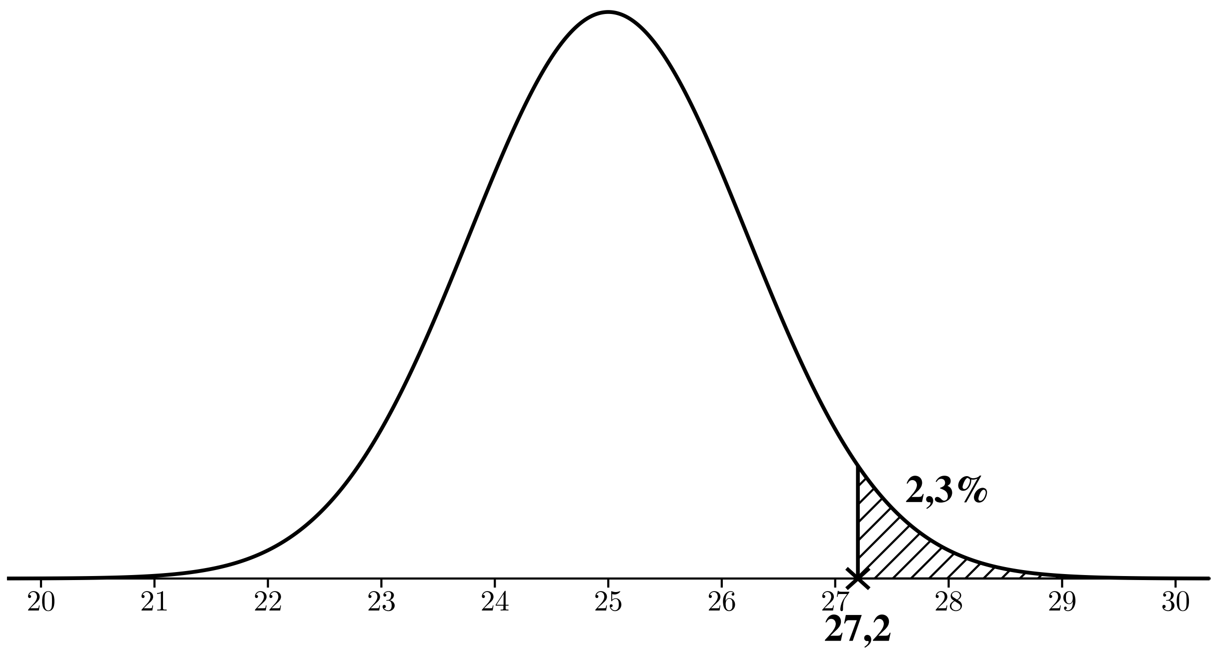
(commun à tous les candidats)

Dans une usine automobile, certaines pièces métalliques sont recouvertes d'une fine couche de nickel qui les protège contre la corrosion et l'usure. Le procédé utilisé est un nickelage par électrolyse.

On admet que la variable aléatoire X, qui à chaque pièce traitée associe l'épaisseur de nickel déposé, suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 25$ micromètres (μm) et d'écart-type σ_1.

Une pièce est conforme si l'épaisseur de nickel déposé est comprise entre $22,8$ μm et $27,2$ μm.

La fonction densité de probabilité de X est représentée ci-dessous.



On a pu déterminer que $P(X > 27,2) = 0,023$.

1) a) Déterminer la probabilité qu'une pièce soit conforme.

b) Justifier que $1,1$ est une valeur approchée de σ_1 à 10^{-1} près.

c) Sachant qu'une pièce est conforme, calculer la probabilité que l'épaisseur de nickel déposé sur celle-ci soit inférieure à 24 μm. Arrondir à 10^{-3}.

2) Une équipe d'ingénieurs propose un autre procédé de nickelage, obtenu par réaction chimique sans aucune source de courant. L'équipe affirme que ce nouveau procédé permet théoriquement d'obtenir 98% de pièces conformes.
La variable aléatoire Y qui, à chaque pièce traitée avec ce nouveau procédé, associe l'épaisseur de nickel déposé suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 25$ mm et d'écart-type σ_2.

a) En admettant l'affirmation ci-dessus, comparer σ_1 et σ_2.

b) Un contrôle de qualité évalue le nouveau procédé ; il révèle que sur 500 pièces testées, 15 sont non conformes.
Au seuil de 95%, peut-on rejeter l'affirmation de l'équipe d'ingénieurs ?

EXERCICE 3 (3 points)

(Commun à tous les candidats)

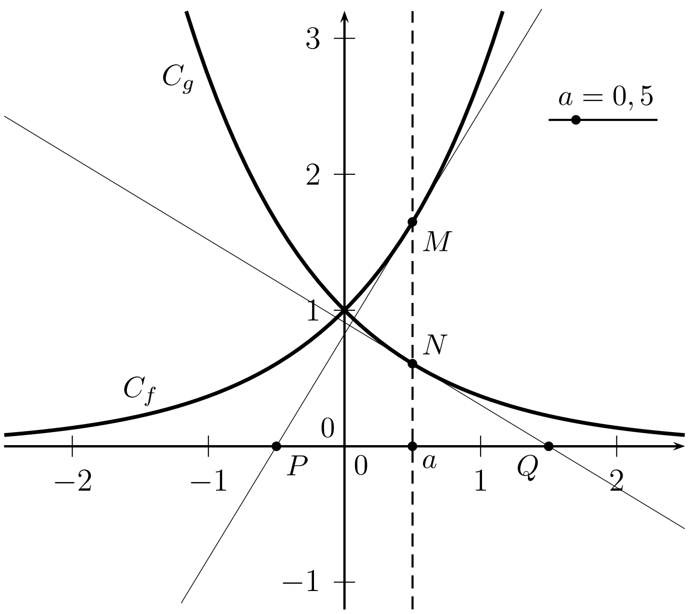
Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x \text{ et } g(x) = e^{-x}.$$

On note C_f la courbe représentative de f et C_g celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

Pour tout réel a, on note M le point de C_f d'abscisse a et N le point de C_g d'abscisse a.
La tangente en M à C_f coupe l'axe des abscisses en P, la tangente en N à C_g coupe l'axe des abscisses en Q.

A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a représenté la situation pour différentes valeurs de a et on a relevé dans un tableur la longueur du segment $[PQ]$ pour chacune de ces valeurs de a.



	A	B
1	Abscisse a	Longueur PQ
2	-3	2
3	-2.5	2
4	-2	2
5	-1.5	2
6	-1	2
7	-0.5	2
8	0	2
9	0.5	2
10	1	2
11	1.5	2
12	2	2
13	2.5	2
14		

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées de manière indépendante.

1) Démontrer que la tangente en M à C_f est perpendiculaire à la tangente en N à C_g.

2) a) Que peut-on conjecturer pour la longueur PQ ?

b) Démontrer cette conjecture.

EXERCICE 4 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel strictement positif.
Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$(E_n)\ :\ \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
On a donné en **ANNEXE**, qui n'est pas à rendre, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthogonal.

1) Etudier les variations de la fonction f.

2) Déterminer son maximum.

Partie B

1) Montrer que, pour $n \geqslant 3$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1; e]$ notée α_n.

2) D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geqslant 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n).

a) Sur le graphique sont tracées les droites D_3, D_4 et D_5 d'équations respectives $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{1}{5}$.
Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n).

b) Comparer, pour tout entier $n \geqslant 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$.
Déterminer le sens de variation de la suite (α_n).

c) En déduire que la suite (α_n) converge.
Il n'est pas demandé de calculer sa limite.

3) On admet que, pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que

$$1 \leqslant \alpha_n \leqslant e \leqslant \beta_n.$$

a) On admet que la suite (β_n) est croissante.
Etablir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3,

$$\beta_n \geqslant n\frac{\beta_3}{3}.$$

b) En déduire la limite de la suite (β_n).

EXERCICE 5 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère les points $A(-1;2;0)$, $B(1;2;4)$ et $C(-1;1;1)$.

1) a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

c) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.

2) Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3) Soient $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$.

a) Démontrer que le plan $\mathscr{P}_2$ a pour équation $x = 2z$.

b) Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

c) Soit la droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ z = t \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que $\mathscr{D}$ est la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

4) Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.

Annexe de l'exercice 4

Cette annexe n'est pas à rendre