BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7

.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (3 points)

(Commun à tous les candidats)

On munit le plan d'un repère orthonormé direct. On considère l'équation :

$$(E)\ :\ z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1) Donner une solution entière de (E).

2) Démontrer que, pour tout nombre complexe z,

$$z^4 + 2z^3 - z - 2 = \left(z^2 + z - 2\right)\left(z^2 + z + 1\right).$$

3) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

4) Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de quatre points A, B, C, D du plan complexe tels que $ABCD$ est un quadrilatère non croisé.
Le quadrilatère $ABCD$ est-il un losange ? Justifier.

EXERCICE 2 (4 points)

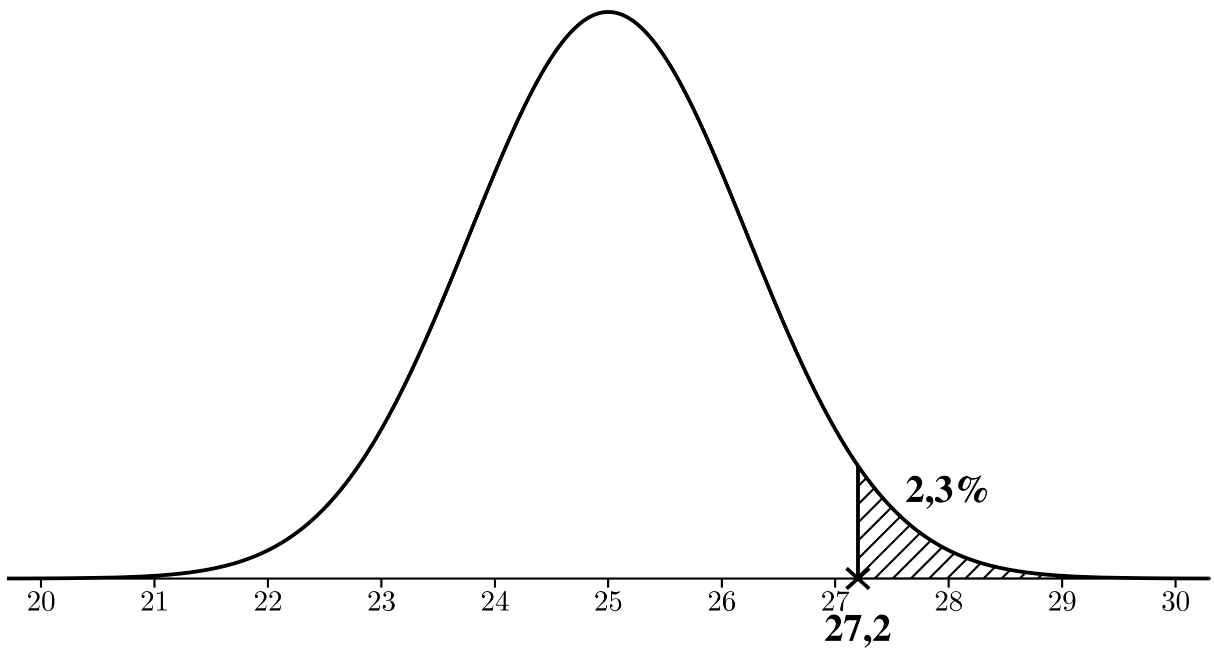
(commun à tous les candidats)

Dans une usine automobile, certaines pièces métalliques sont recouvertes d'une fine couche de nickel qui les protège contre la corrosion et l'usure. Le procédé utilisé est un nickelage par électrolyse.

On admet que la variable aléatoire X, qui à chaque pièce traitée associe l'épaisseur de nickel déposé, suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 25$ micromètres (μm) et d'écart-type σ_1.

Une pièce est conforme si l'épaisseur de nickel déposé est comprise entre $22,8$ μm et $27,2$ μm.

La fonction densité de probabilité de X est représentée ci-dessous.



On a pu déterminer que $P(X > 27,2) = 0,023$.

1) a) Déterminer la probabilité qu'une pièce soit conforme.

b) Justifier que $1,1$ est une valeur approchée de σ_1 à 10^{-1} près.

c) Sachant qu'une pièce est conforme, calculer la probabilité que l'épaisseur de nickel déposé sur celle-ci soit inférieure à 24 μm. Arrondir à 10^{-3}.

2) Une équipe d'ingénieurs propose un autre procédé de nickelage, obtenu par réaction chimique sans aucune source de courant. L'équipe affirme que ce nouveau procédé permet théoriquement d'obtenir 98% de pièces conformes.
La variable aléatoire Y qui, à chaque pièce traitée avec ce nouveau procédé, associe l'épaisseur de nickel déposé suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 25$ mm et d'écart-type σ_2.

a) En admettant l'affirmation ci-dessus, comparer σ_1 et σ_2.

b) Un contrôle de qualité évalue le nouveau procédé ; il révèle que sur 500 pièces testées, 15 sont non conformes.
Au seuil de 95%, peut-on rejeter l'affirmation de l'équipe d'ingénieurs ?

EXERCICE 3 (3 points)

(Commun à tous les candidats)

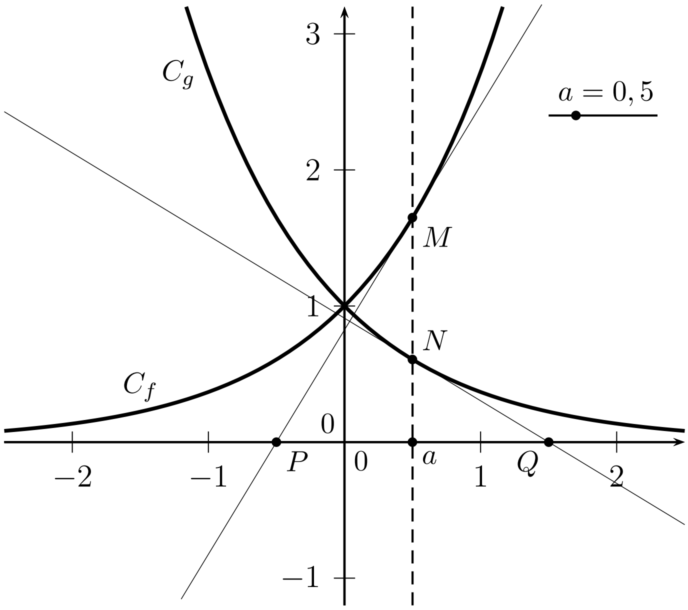
Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x \text{ et } g(x) = e^{-x}.$$

On note C_f la courbe représentative de f et C_g celle de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

Pour tout réel a, on note M le point de C_f d'abscisse a et N le point de C_g d'abscisse a.
La tangente en M à C_f coupe l'axe des abscisses en P, la tangente en N à C_g coupe l'axe des abscisses en Q.

A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on a représenté la situation pour différentes valeurs de a et on a relevé dans un tableur la longueur du segment $[PQ]$ pour chacune de ces valeurs de a.



	A	B
1	Abscisse a	Longueur PQ
2	-3	2
3	-2.5	2
4	-2	2
5	-1.5	2
6	-1	2
7	-0.5	2
8	0	2
9	0.5	2
10	1	2
11	1.5	2
12	2	2
13	2.5	2
14		

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées de manière indépendante.

1) Démontrer que la tangente en M à C_f est perpendiculaire à la tangente en N à C_g.

2) a) Que peut-on conjecturer pour la longueur PQ ?

b) Démontrer cette conjecture.

EXERCICE 4 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel strictement positif.
Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$(E_n)\ :\ \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
On a donné en **ANNEXE**, qui n'est pas à rendre, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthogonal.

1) Etudier les variations de la fonction f.

2) Déterminer son maximum.

Partie B

1) Montrer que, pour $n \geqslant 3$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1; e]$ notée α_n.

2) D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geqslant 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n).

a) Sur le graphique sont tracées les droites D_3, D_4 et D_5 d'équations respectives $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{1}{5}$.
Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n).

b) Comparer, pour tout entier $n \geqslant 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$.
Déterminer le sens de variation de la suite (α_n).

c) En déduire que la suite (α_n) converge.
Il n'est pas demandé de calculer sa limite.

3) On admet que, pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que

$$1 \leqslant \alpha_n \leqslant e \leqslant \beta_n.$$

a) On admet que la suite (β_n) est croissante.
Etablir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3,

$$\beta_n \geqslant n\frac{\beta_3}{3}.$$

b) En déduire la limite de la suite (β_n).

EXERCICE 5 (5 points)

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 2u_n + 6.$$

1) Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 9 \times 2^n - 6.$$

2) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, u_n est divisible par 6.

On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{u_n}{6}$.

3) On considère l'affirmation : « pour tout naturel n non nul, v_n est un nombre premier ».
Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

4)

a) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $v_{n+1} - 2v_n = 1$.

b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.

c) En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1}.

5)

a) Vérifier que $2^4 \equiv 1\ [5]$.

b) En déduire que si n est un entier de la forme $4k + 2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.

c) Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ? Justifier.

Annexe de l'exercice 4

Cette annexe n'est pas à rendre