Antilles Guyane 2017. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

1) $1^4 + 2 \times 1^3 - 1 - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$. Donc, 1 est une solution entière de l'équation (E).

2) Pour tout nombre complexe z,

$$\left(z^2 + z - 2\right)\left(z^2 + z + 1\right) = z^4 + z^3 + z^2 + z^3 + z^2 + z - 2z^2 - 2z - 2 = z^4 + 2z^3 - z - 2.$$

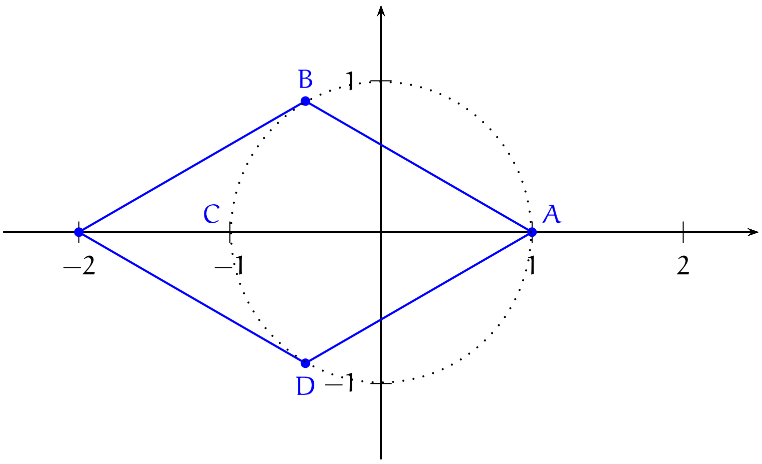
3) Soit z un nombre complexe. $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(z^2 + z - 2\right)\left(z^2 + z + 1\right) = 0 \Leftrightarrow z^2 + z - 2 = 0$ ou $z^2 + z + 1 = 0$.

• Le discriminant de l'équation $z^2 + z - 2 = 0$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$. L'équation $z^2 + z - 2 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes à savoir $z_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{9}}{2} = 1$ et $z_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{9}}{2} = -2$.

• Le discriminant de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$. Δ est strictement négatif et donc l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ admet deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_3 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_4 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$ sont 1, -2, $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4) On note A, B, C et D les points d'affixes respectives $a = 1$, $b = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $c = -2$ et $d = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Les coordonnées respectives des points A, B, C et D sont $(1, 0)$, $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(-2, 0)$ et $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Ainsi, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-3, 0)$ et le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées $\left(0, -\sqrt{3}\right)$. Ensuite,

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (-3) \times 0 + 0 \times \left(-\sqrt{3}\right) = 0.$$

Les diagonales du parallélogramme ABCD sont perpendiculaires et donc le parallélogramme ABCD est un losange.

 © Jean-Louis Rouget, 2017. Tous droits réservés.

EXERCICE 2

1) a) La probabilité demandée est $P(22,8 \leqslant X \leqslant 27,2)$.
$27,2 = 25 + 2,2 = \mu_1 + 2,2$ et $22,8 = 25 - 2,2 = \mu_1 - 2,2$. Pour des raisons de symétrie,

$$P(22,8 \leqslant X \leqslant 27,2) = 1 - P(X < 22,8) - P(X > 27,2) = 1 - 2P(X > 27,2) = 1 - 2 \times 0,023 = 0,954.$$

b) $P(X \leqslant 27,2) = 1 - 0,023 = 0,977$. Or, $X \leqslant 27,2 \Leftrightarrow X - 25 \leqslant 2,2 \Leftrightarrow \dfrac{X-25}{\sigma_1} \leqslant \dfrac{2,2}{\sigma_1}$ et donc

$$P\left(\frac{X-25}{\sigma_1} \leqslant \frac{2,2}{\sigma_1}\right) = 0,977$$

où de plus la variable $\dfrac{X-25}{\sigma_1}$ suit la loi normale centrée réduite. La calculatrice fournit $\dfrac{2,2}{\sigma_1} = 1,995\ldots$ et donc $\sigma_1 = \dfrac{2,2}{1,995\ldots} = 1,1$ à 10^{-1} près par défaut.

c) La probabilité demandée est $P_{22,8 \leqslant X \leqslant 27,2}(X \leqslant 24)$.

$$P_{22,8 \leqslant X \leqslant 27,2}(X \leqslant 24) = \frac{P((22,8 \leqslant X \leqslant 27,2) \cap (X \leqslant 24))}{P(22,8 \leqslant X \leqslant 27,2)} = \frac{P(22,8 \leqslant X \leqslant 24)}{P(22,8 \leqslant X \leqslant 27,2)}.$$

La calculatrice fournit $P_{22,8 \leqslant X \leqslant 27,2}(X \leqslant 24) = 0,166$ arrondi à 10^{-3}.

2) a) $P(22,8 \leqslant X \leqslant 27,2)$ a augmenté et donc $\sigma_2 < \sigma_1$.

b) Ici, $n = 500$ et on fait l'hypothèse que $p = 0,98$. On note que $n \geqslant 30$ puis $np = 490 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 10 \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,98 - 1,96\sqrt{\frac{0,98 \times 0,02}{500}} ; 0,98 + 1,96\sqrt{\frac{0,98 \times 0,02}{500}}\right] = [0,967 ; 0,993]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \dfrac{500 - 15}{500} = 0,97$. f appartient à l'intervalle de fluctuation et donc, on ne peut pas rejeter l'affirmation de l'équipe d'ingénieurs.

 © Jean-Louis Rouget, 2017. Tous droits réservés.

EXERCICE 3

1) Le coefficient directeur de la tangente (T_f) à $\mathscr{C}_f$ en M est $f'(a)$ ou encore e^a. Le coefficient directeur de la tangente (T_g) à $\mathscr{C}_g$ en N est $g'(a)$ ou encore $-e^{-a}$.

Le produit de ces coefficients directeurs est

$$f'(a) \times g'(a) = e^a \times \left(-e^{-a}\right) = -e^0 = -1.$$

On en déduit que les deux tangentes sont perpendiculaires.

2) a) Il semblerait que la longueur PQ soit constante, égale à 2, quand a varie.

b) Une équation de (T_f) en M est $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ ou encore $y = e^a + e^a(x - a)$. Une équation de (T_g) est $y = g(a) + g'(a)(x - a)$ ou encore $y = e^{-a} - e^{-a}(x - a)$.

P est le point de (T_f) d'ordonnée nulle. Donc, $e^a + e^a\left(x_P - a\right) = 0$ puis $e^a\left(1 + \left(x_P - a\right)\right) = 0$ puis $1 + x_P - a = 0$ (car $e^a \neq 0$) et finalement $x_P = a - 1$.
Q est le point de (T_g) d'ordonnée nulle. Donc, $e^{-a} - e^{-a}\left(x_Q - a\right) = 0$ puis $e^{-a}\left(1 - \left(x_Q - a\right)\right) = 0$ puis $1 - x_Q + a = 0$ et finalement $x_Q = a + 1$.

Donc, $PQ = |x_Q - x_P| = |(a + 1) - (a - 1)| = |a + 1 - a + 1| = 2$.

 © Jean-Louis Rouget, 2017. Tous droits réservés.

EXERCICE 4.

Partie A

1) Pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Pour tout réel $x > 0$, $x^2 > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $1-\ln(x)$. Or, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln(x) > -1 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \Leftrightarrow x < e$$

et de même, $1 - \ln(x) < 0 \Leftrightarrow x > e$ et $1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$. La fonction f' est strictement positive sur $]0, e[$, strictement négative sur $]e, +\infty[$ et s'annule en e. Donc, la fonction f est strictement croissante sur $]0, e]$ et strictement décroissantes sur $[e, +\infty[$.

2) La fonction f admet un maximum en e et ce maximum est

$$f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}.$$

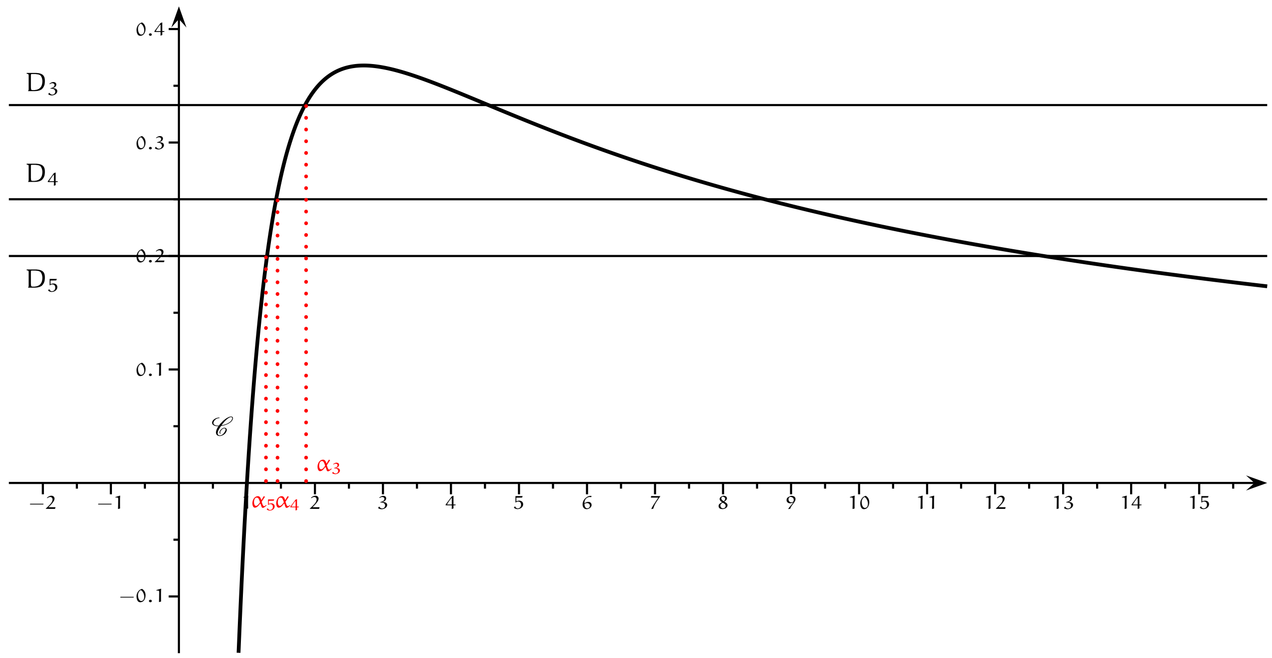
Partie B

1) Soit $n \geqslant 3$. Donc, $n > e$ puis $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{e}$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1, e]$. Donc, pour tout réel k de $[f(1), f(e)] = \left[0, \frac{1}{e}\right]$, il existe un réel x et un seul de $[1, e]$ tel que $f(x) = k$. En particulier, il existe un réel α_n de $[1, e]$ et un seul tel que $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$.

Ceci montre que l'équation (E_n) admet une solution et une seule, notée α_n, dans $[1, e]$.

2) a) α_n est la plus petite des deux abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite d'équation $y = \frac{1}{n}$. Sur le graphique, il semble que α_n aille en diminuant quand n augmente ou encore il semble que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ soit décroissante.



b) Soit $n \geqslant 3$. Par définition, $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ et $f(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$. Donc, $f(\alpha_{n+1}) < f(\alpha_n)$ (et $1 \leqslant \alpha_n \leqslant e$ et $1 \leqslant \alpha_{n+1} \leqslant e$). Puisque la fonction f est strictement croissante sur $[1, e]$, on en déduit que $\alpha_{n+1} < \alpha_n$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 3$, $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ et donc la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est strictement décroissante.

c) La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et est minorée par 1. Donc, la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ converge.

 © Jean-Louis Rouget, 2017. Tous droits réservés.

3) a) Par définition, pour tout $n \geqslant 3$, $\dfrac{\ln(\beta_n)}{\beta_n} = \dfrac{1}{n}$ ou encore $\ln(\beta_n) = \dfrac{\beta_n}{n}$. En particulier, $\ln(\beta_3) = \dfrac{\beta_3}{3}$. Puisque la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$ est croissante, on en déduit que pour $n \geqslant 3$, $\beta_n \geqslant \beta_3$ puis, par stricte croissance de la fonction ln, sur $]0, +\infty[$, $\ln(\beta_n) \geqslant \ln(\beta_3)$ et donc $\dfrac{\beta_n}{n} \geqslant \dfrac{\beta_3}{3}$.

Finalement, $\beta_n \geqslant n\dfrac{\beta_3}{3}$.

b) Puisque $\dfrac{\beta_3}{3} > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\dfrac{\beta_3}{3} > 0$. Puisque pour tout $n \geqslant 3$, $\beta_n \geqslant n\dfrac{\beta_3}{3}$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = +\infty$.

 © Jean-Louis Rouget, 2017. Tous droits réservés.

EXERCICE 5.

1) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 9 \times 2^n - 6$.

- $9 \times 2^0 - 6 = 9 - 6 = 3 = u_0$. Donc, l'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n = 9 \times 2^n - 6$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n + 6 \\ &= 2\left(9 \times 2^n - 6\right) + 6 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= 2 \times 9 \times 2^n - 12 + 6 \\ &= 9 \times 2^{n+1} - 6. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 9 \times 2^n - 6$.

2) Soit $n \geqslant 1$. $u_n = 9 \times 2^n - 6 = 3 \times 3 \times 2 \times 2^{n-1} - 6 = 6\left(3 \times 2^{n-1} - 1\right)$. De plus, $3 \times 2^{n-1} - 1$ est un entier relatif car n est supérieur ou égal à 1. Ceci montre que, pour $n \geqslant 1$, u_n est un entier divisible par 6.

3) Pour $n \geqslant 1$, on a $v_n = 3 \times 2^{n-1} - 1$. En particulier, $v_6 = 3 \times 2^5 - 1 = 3 \times 32 - 1 = 95 = 5 \times 19$. v_6 n'est pas un nombre premier et donc il existe au moins un entier naturel non nul n tel que v_n ne soit pas premier. L'affirmation de l'énoncé est fausse.

4) a) Soit $n \geqslant 1$. $v_{n+1} - 2v_n = \dfrac{1}{6}\left(u_{n+1} - 2u_n\right) = \dfrac{1}{6}\left(2u_n + 6 - 2u_n\right) = 1$.

b) Soit $n \geqslant 1$. $1 \times v_{n+1} + (-2)v_n = 1$. Donc, il existe deux entiers relatifs a et b tels que $a \times v_{n+1} + b \times v_n = 1$. D'après le théorème de BÉZOUT, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.

c) Soit $n \geqslant 1$. $\text{PGCD}\left(u_n, u_{n+1}\right) = \text{PGCD}\left(6v_n, 6v_{n+1}\right) = 6\ \text{PGCD}\left(v_n, v_{n+1}\right) = 6$. Donc, pour tout entier naturel non nul n, $\text{PGCD}\left(u_n, u_{n+1}\right) = 6$.

5) a) $2^4 = 16 = 1 + 3 \times 5$ et donc $2^4 \equiv 1$ [5].

b) Soient k un entier naturel puis $n = 4k+2$. $2^n = 2^{4k+2} = \left(2^4\right)^k \times 2^2$ et donc $2^n \equiv (1)^k \times 2^2$ [5] ou encore $2^n \equiv 4$ [5]. On en déduit que $u_n \equiv 9 \times 4 - 6$ [5] ou encore $u_n \equiv 30$ [5] ou enfin $u_n \equiv 0$ [5]. Ceci montre que u_n est un multiple de 5.

c) Soit n un entier naturel. n est soit de la forme $4k$, $k \in \mathbb{N}$, soit de la forme $4k+1$, $k \in \mathbb{N}$, soit de la forme $4k+2$, $k \in \mathbb{N}$, soit de la forme $4k+3$, $k \in \mathbb{N}$,

• Soient k un entier naturel puis $n = 4k$. Alors, $2^n = \left(2^4\right)^k \equiv 1$ [5] puis $u_n \equiv 9 \times 1 - 6$ [5] ou encore $u_n \equiv 3$ [5]. Mais alors $u_n \not\equiv 0$ [5]. Dans ce cas, u_n n'est pas divisible par 5.

• Soient k un entier naturel puis $n = 4k+1$. Alors, $2^n = \left(2^4\right)^k \times 2 \equiv 2$ [5] puis $u_n \equiv 9 \times 2 - 6$ [5] ou encore $u_n \equiv 2$ [5]. Dans ce cas, u_n n'est pas divisible par 5.

• Soient k un entier naturel puis $n = 4k+3$. Alors, $2^n = \left(2^4\right)^k \times 2^3 \equiv 3$ [5] puis $u_n \equiv 9 \times 3 - 6$ [5] ou encore $u_n \equiv 1$ [5]. Dans ce cas, u_n n'est pas divisible par 5.

En résumé, pour tout $n \geqslant 0$, u_n est divisible par 5 si et seulement si n est de la forme $4k+2$ où k est un entier naturel.

 © Jean-Louis Rouget, 2017. Tous droits réservés.