Session 2017

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement Spécifique

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

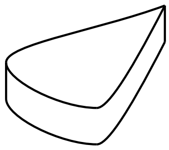
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

La chocolaterie Delmas décide de commercialiser de nouvelles confiseries : des palets au chocolat en forme de goutte d'eau.
Pour cela, elle doit fabriquer des moules sur mesure qui doivent répondre à la contrainte suivante : pour que cette gamme de bonbons soit rentable, la chocolaterie doit pouvoir en fabriquer au moins 80 avec 1 litre de pâte liquide au chocolat.

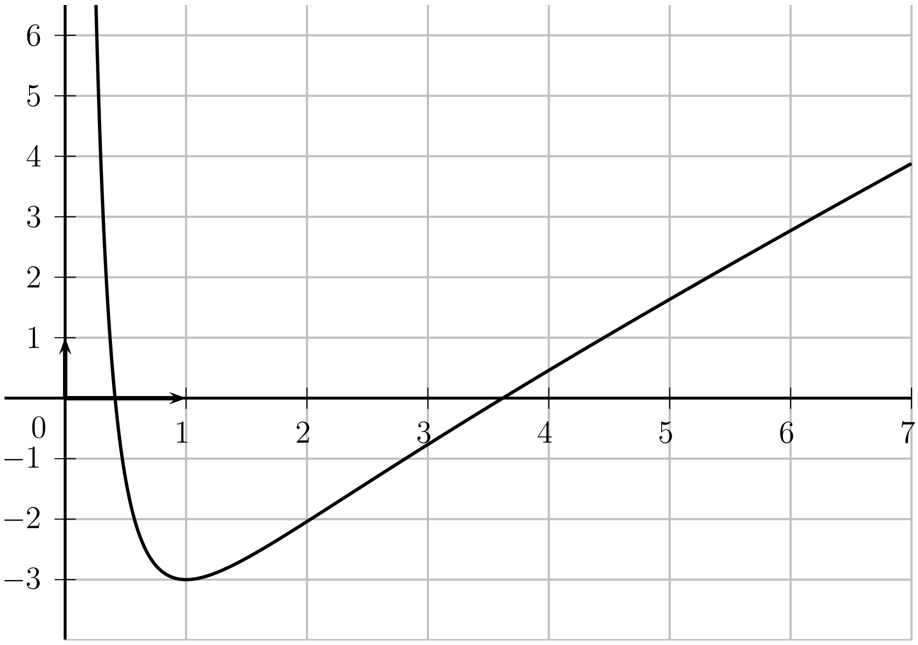


Partie A : modélisation par une fonction

Le demi contour de la face supérieure du palet sera modélisé par une portion de la courbe de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2 - 3\ln x}{x}.$$

La représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous.



Le repère est orthogonal d'unité 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

1) Soit φ la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = x^2 - 1 + 3\ln x.$$

a) Calculer $\varphi(1)$ et la limite de φ en 0.

b) Etudier les variations de φ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
En déduire le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x.

2) a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Montrer que sur $]0\ ;\ +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$.
En déduire le tableau de variation de f.

c) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; 1]$.
Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
On admettra que l'équation $f(x) = 0$ a également une unique solution β sur $[1\ ;\ +\infty[$ avec $\beta \approx 3,61$ à 10^{-2} près.

d) Soit F la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2\ln x - \frac{3}{2}(\ln x)^2.$$

Montrer que F est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B : résolution du problème

*Dans cette partie, les calculs seront effectués avec les valeurs approchées à 10^{-2} près de α et β de la partie **A**.*

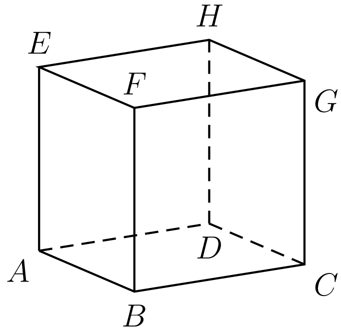
Pour obtenir la forme de la goutte, on considère la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f restreinte à l'intervalle $[\alpha\ ;\ \beta]$ ainsi que son symétrique $\mathscr{C}'$ par rapport à l'axe des abscisses.

Les deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ délimitent la face supérieure du palet. Pour des raisons esthétiques, le chocolatier aimerait que ses palets aient une épaisseur de $0,5$ cm. Dans ces conditions, la contrainte de rentabilité serait-elle respectée ?

EXERCICE 2 (4 points)

(commun à tous les candidats)

On considère un cube $ABCDEFGH$.



1) a) Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD} = 0$.

c) On admet que $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE} = 0$.
Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2) L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

a) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x + y + z - 1 = 0$.

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite (AG) et du plan (BDE).

c) On admet que l'aire, en unité d'aire, du triangle BDE est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Calculer le volume de la pyramide $BDEG$.

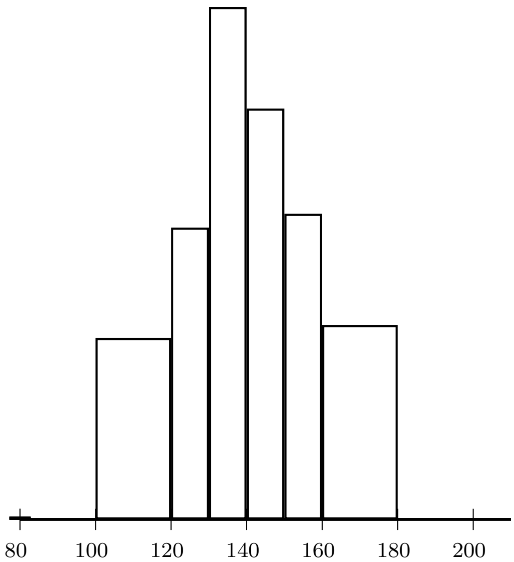
EXERCICE 3 (3 points)

(Commun à tous les candidats)

Partie A :

Un organisme de contrôle sanitaire s'intéresse au nombre de bactéries d'un certain type contenues dans la crème fraîche. Pour cela, il effectue des analyses portant sur $10\ 000$ prélèvements de 1 ml de crème fraîche dans l'ensemble de la production française.
Les résultats sont donnés dans le tableau et représentés dans l'histogramme ci-dessous :

Nombre de bactéries (en milliers)	$[100;120[$	$[120;130[$	$[130;140[$	$[140;150[$	$[150;160[$	$[160;180[$
Nombre de prélèvements	$1\ 597$	$1\ 284$	$2\ 255$	$1\ 808$	$1\ 345$	$1\ 711$



A l'aide de la calculatrice, donner une estimation de la moyenne et de l'écart-type du nombre de bactéries par prélèvement.

Partie B :

L'organisme décide alors de modéliser le nombre de bactéries étudiées (en milliers par ml) présentes dans la crème fraîche par une variable aléatoire X suivant la loi normale de paramètres $\mu = 140$ et $\sigma = 19$.

1) a) Ce choix de modélisation est-il pertinent ? Argumenter.

b) On note $p = P(X \geqslant 160)$. Déterminer la valeur arrondie de p à 10^{-3}.

2) Lors de l'inspection d'une laiterie, l'organisme de contrôle sanitaire analyse un échantillon de 50 prélèvements de 1 ml de crème fraîche dans la production de cette laiterie. 13 prélèvements contiennent plus de 160 milliers de bactéries.

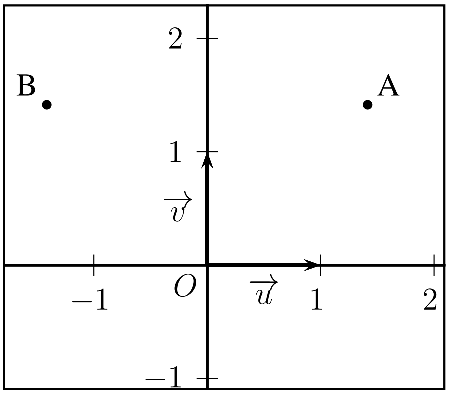
a) L'organisme déclare qu'il y a une anomalie dans la production et qu'il peut l'affirmer en ayant une probabilité de 0,05 de se tromper. Justifier sa déclaration.

b) Aurait-il pu l'affirmer avec une probabilité de $0,01$ de se tromper ?

EXERCICE 4 (3 points)

(Commun à tous les candidats)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_B = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.



1) Montrer que OAB est un triangle rectangle isocèle.

2) On considère l'équation

$$(E)\ :\ z^2 - \sqrt{6}\,z + 2 = 0.$$

Montrer qu'une des solutions de (E) est l'affixe d'un point situé sur le cercle circonscrit au triangle OAB.

EXERCICE 5 (5 points)

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve. Cette population est estimée à $12\ 000$ individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les $60\ 000$ individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.

L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2016 + n$. On a donc $v_0 = 12$.

1) Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.

2) Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$.

1) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x.$$

a) Justifier que g est croissante sur $[0\ ;\ 60]$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

2) On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.

a) Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.

c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

d) En déduire la convergence de la suite (u_n).

e) On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3) Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les $50\ 000$ individus avec ce second modèle. Il utilise l'algorithme suivant.

Variables	n un entier naturel u un nombre réel

Traitement	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 12
	Tant Que ....
	    u prend la valeur ....
	    n prend la valeur ....
	Fin Tant Que

Sortie	Afficher ....

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geqslant 50$.