BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8

.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

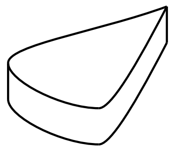
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

La chocolaterie Delmas décide de commercialiser de nouvelles confiseries : des palets au chocolat en forme de goutte d'eau.
Pour cela, elle doit fabriquer des moules sur mesure qui doivent répondre à la contrainte suivante : pour que cette gamme de bonbons soit rentable, la chocolaterie doit pouvoir en fabriquer au moins 80 avec 1 litre de pâte liquide au chocolat.

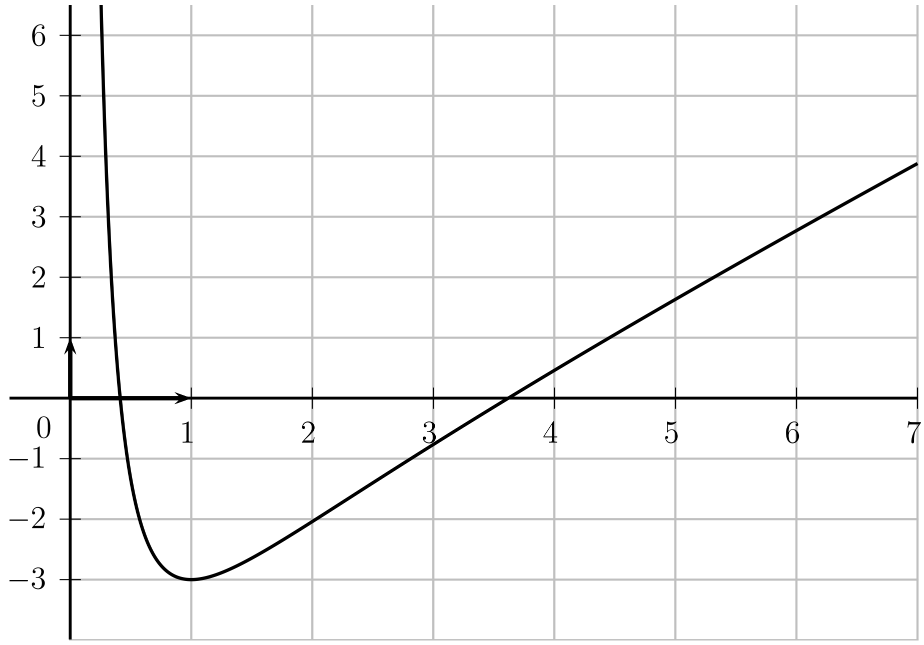


Partie A : modélisation par une fonction

Le demi contour de la face supérieure du palet sera modélisé par une portion de la courbe de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2 - 3\ln x}{x}.$$

La représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous.



Le repère est orthogonal d'unité 2 *cm en abscisses et* 1 *cm en ordonnées.*

1) Soit φ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = x^2 - 1 + 3\ln x.$$

a) Calculer $\varphi(1)$ et la limite de φ en 0.

b) Etudier les variations de φ sur $]0\,;\,+\infty[$.
En déduire le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x.

2) a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Montrer que sur $]0\,;\,+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$.
En déduire le tableau de variation de f.

c) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; 1]$.
Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
On admettra que l'équation $f(x) = 0$ a également une unique solution β sur $[1\,;\,+\infty[$ avec $\beta \approx 3,61$ à 10^{-2} près.

d) Soit F la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2\ln x - \frac{3}{2}(\ln x)^2.$$

Montrer que F est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B : résolution du problème

*Dans cette partie, les calculs seront effectués avec les valeurs approchées à 10^{-2} près de α et β de la partie **A**.*

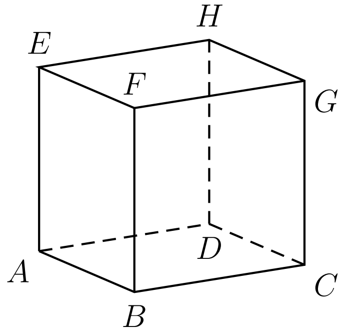
Pour obtenir la forme de la goutte, on considère la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f restreinte à l'intervalle $[\alpha\ ;\ \beta]$ ainsi que son symétrique $\mathscr{C}'$ par rapport à l'axe des abscisses.

Les deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ délimitent la face supérieure du palet. Pour des raisons esthétiques, le chocolatier aimerait que ses palets aient une épaisseur de $0,5$ cm. Dans ces conditions, la contrainte de rentabilité serait-elle respectée ?

EXERCICE 2 (4 points)

(commun à tous les candidats)

On considère un cube $ABCDEFGH$.



1) a) Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD} = 0$.

c) On admet que $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE} = 0$.
Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2) L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

a) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x + y + z - 1 = 0$.

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite (AG) et du plan (BDE).

c) On admet que l'aire, en unité d'aire, du triangle BDE est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Calculer le volume de la pyramide $BDEG$.

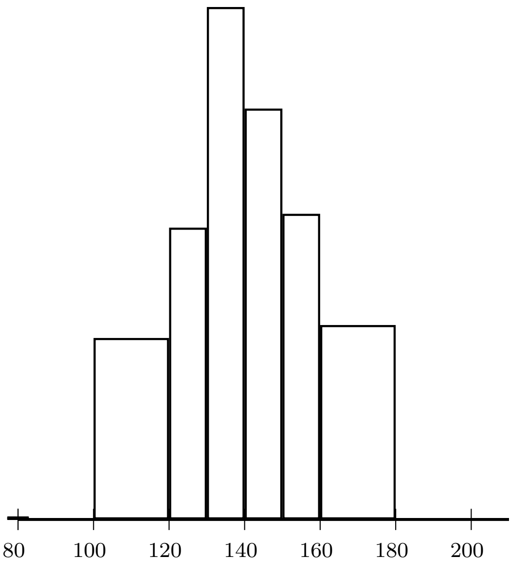
EXERCICE 3 (3 points)

(Commun à tous les candidats)

Partie A :

Un organisme de contrôle sanitaire s'intéresse au nombre de bactéries d'un certain type contenues dans la crème fraîche. Pour cela, il effectue des analyses portant sur $10\ 000$ prélèvements de 1 ml de crème fraîche dans l'ensemble de la production française.
Les résultats sont donnés dans le tableau et représentés dans l'histogramme ci-dessous :

Nombre de bactéries (en milliers)	[100 ; 120[	[120 ; 130[	[130 ; 140[	[140 ; 150[	[150 ; 160[	[160 ; 180[
Nombre de prélèvements	1 597	1 284	2 255	1 808	1 345	1 711



A l'aide de la calculatrice, donner une estimation de la moyenne et de l'écart-type du nombre de bactéries par prélèvement.

Partie B :

L'organisme décide alors de modéliser le nombre de bactéries étudiées (en milliers par ml) présentes dans la crème fraîche par une variable aléatoire X suivant la loi normale de paramètres $\mu = 140$ et $\sigma = 19$.

1) a) Ce choix de modélisation est-il pertinent ? Argumenter.

b) On note $p = P(X \geqslant 160)$. Déterminer la valeur arrondie de p à 10^{-3}.

2) Lors de l'inspection d'une laiterie, l'organisme de contrôle sanitaire analyse un échantillon de 50 prélèvements de 1 ml de crème fraîche dans la production de cette laiterie. 13 prélèvements contiennent plus de 160 milliers de bactéries.

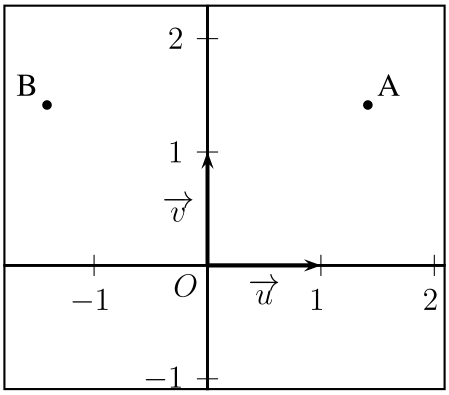
a) L'organisme déclare qu'il y a une anomalie dans la production et qu'il peut l'affirmer en ayant une probabilité de 0,05 de se tromper. Justifier sa déclaration.

b) Aurait-il pu l'affirmer avec une probabilité de $0,01$ de se tromper ?

EXERCICE 4 (3 points)

(Commun à tous les candidats)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_B = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.



1) Montrer que OAB est un triangle rectangle isocèle.

2) On considère l'équation

$$(E)\ :\ z^2 - \sqrt{6}\,z + 2 = 0.$$

Montrer qu'une des solutions de (E) est l'affixe d'un point situé sur le cercle circonscrit au triangle OAB.

EXERCICE 5 (5 points)

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Dans un jeu vidéo en ligne, les joueurs peuvent décider de rejoindre l'équipe A (statut noté A) ou l'équipe B (statut noté B) ou bien de n'en rejoindre aucune et rester ainsi solitaire (statut noté S). Chaque jour, chaque joueur peut changer de statut mais ne peut pas se retirer du jeu.
Les données recueillies sur les premières semaines après le lancement du jeu ont permis de dégager les tendances suivantes :

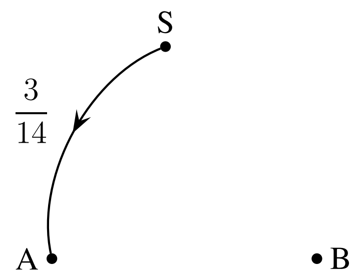
- un joueur de l'équipe A y reste le jour suivant avec une probabilité de $0,6$; il devient joueur solitaire avec une probabilité de $0,25$. Sinon, il rejoint l'équipe B ;
- un joueur de l'équipe B y reste le jour suivant avec une probabilité de $0,6$; sinon, il devient joueur solitaire avec une probabilité identique à celle de rejoindre l'équipe A ;
- un joueur solitaire garde ce statut le jour suivant avec une probabilité de $\frac{1}{7}$; il rejoint l'équipe B avec une probabilité 3 fois plus élevée que celle de rejoindre l'équipe A.

Au début du jeu, à la clôture des inscriptions, tous les joueurs sont solitaires.
On note $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & s_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste des statuts d'un joueur au bout de n jours. Ainsi a_n est la probabilité d'être dans l'équipe A, b_n celle d'être dans l'équipe B et s_n celle d'être un joueur solitaire, après n jours de jeu.
On a donc : $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ et $s_0 = 1$.

1) On note p la probabilité qu'un joueur solitaire un jour donné passe dans l'équipe A le jour suivant. Justifier que $p = \frac{3}{14}$.

2) a)

Recopier et compléter le graphe probabiliste ci-contre représentant la situation.



b) On admet que la matrice de transition est $T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, on a donc $U_{n+1} = U_n T$.
Montrer alors que, pour tout entier naturel n, on a $U_n = U_0 T^n$.

c) Déterminer l'état probabiliste au bout d'une semaine, en arrondissant au millième.

3) On pose $V = \begin{pmatrix} 300 & 405 & 182 \end{pmatrix}$.

a) Donner, sans détailler les calculs, le produit matriciel VT. Que constate-t-on ?

b) En déduire un état probabiliste qui reste stable d'un jour sur l'autre.

4) On donne l'algorithme suivant, où la commande « $U[i]$ » renvoie le coefficient de la i-ème colonne d'une matrice ligne U.

Variables	k un entier naturel U une matrice de taille 1×3 T une matrice carrée d'ordre 3
Traitement	U prend la valeur $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ T prend la valeur $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$ Pour k allant de 1 à 7 U prend la valeur UT Fin Pour
Sortie	Afficher $U[1]$

a) Quelle est la valeur numérique arrondie au millième de la sortie de cet algorithme ? L'interpréter dans le contexte de l'exercice.

b) Recopier et modifier cet algorithme pour qu'il affiche la fréquence de joueurs solitaires au bout de 13 jours.