Amérique du Sud. Novembre 2017.
Enseignement de Spécilialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) a) $\varphi(1) = 1^2 - 1 + 3\ln(1) = 0$. Ensuite, $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-1\right) = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0} 3\ln(x) = -\infty$. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = -\infty$.

b) La fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = 2x + \frac{3}{x}.$$

La fonction φ' est strictement positive sur $]0,+\infty[$ et donc la fonction φ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
Par suite, pour $0 < x < 1$, on a $\varphi(x) < \varphi(1)$ ou encore $\varphi(x) < 0$ et pour $x > 1$, on a $\varphi(x) > \varphi(1)$ ou encore $\varphi(x) > 0$.
La fonction φ est strictement négative sur $]0,1[$, strictement positive sur $]1,+\infty[$ et s'annule en 1.

2) a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-2x-2\right) = -2$ et $\lim\limits_{x\to 0} -3\ln(x) = +\infty$. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-2x-2-3\ln x\right) = +\infty$.
D'autre part, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-2x-2-3\ln x\right)\times\frac{1}{x} = +\infty$.

Pour tout réel strictement positif x, $f(x) = x - 2 - \frac{2}{x} - 3\frac{\ln x}{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -3\frac{\ln x}{x} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. En additionnant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

b) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\left(2x-2-\frac{3}{x}\right)x - \left(x^2-2x-2-3\ln x\right)\times 1}{x^2} = \frac{2x^2-2x-3-x^2+2x+2+3\ln x}{x^2}\\ &= \frac{x^2-1+3\ln x}{x^2} = \frac{\varphi(x)}{x^2}.\end{aligned}$$

Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$. Avec le résultat de la question 1)b), on peut dresser le tableau de variation de la fonction f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$

c) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0,1]$. On sait alors que pour tout réel k de $\left[f(1), \lim\limits_{x\to 0} f(x)\right[= [-3,+\infty[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans $]0,1]$. En particulier, puisque $0 \in [-3,+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $]0,1]$, solution notée α.

La calculatrice fournit $f(0,41) = 0,05\ldots > 0$ $f(0,42) = -0,14\ldots < 0$. Donc, $f(0,41) > f(\alpha) > f(0,42)$. Puisque f est strictement décroissante sur $]0,1]$, on en déduit que $0,41 < \alpha < 0,42$. Une valeur approchée de α à 10^{-2} près est $0,41$.

d) La fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}F'(x) &= \frac{1}{2}\times 2x - 2 - 2\times\frac{1}{x} - \frac{3}{2}\times 2\times\frac{1}{x}\times\ln x = x - 2 - \frac{2}{x} - \frac{3\ln x}{x}\\ &= \frac{x^2-2x-2-3\ln x}{x} = f(x).\end{aligned}$$

Donc, la fonction F est une primitive de la fonction f sur $]0,+\infty[$.

 © Jean-Louis Rouget, 2018. Tous droits réservés.

Partie B

$\mathscr{C}'$ est la courbe représentative de la fonction $-f$ sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Puisque la fonction $-f$ est positive sur $[\alpha, \beta]$, l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine compris entre l'axe des abscisses et $\mathscr{C}'$ d'une part, les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = \beta$ d'autre part, est

$$\int_{\alpha}^{\beta} -f(x)\ dx = [-F(x)]_{\alpha}^{\beta} = F(\alpha) - F(\beta).$$

Par symétrie, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ d'une part, les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = \beta$ est $2(F(\alpha) - F(\beta))$. L'unité d'aire est égale à 2 cm^2 et donc l'aire, exprimée en cm^2, du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ est égale à $2 \times 2(F(\alpha) - F(\beta))$. Le volume d'un palet en cm^3 est

$$0,5 \times 4(F(\alpha) - F(\beta)) = 2(F(\alpha) - F(\beta)).$$

Enfin, le volume total de pâte, en cm^3, pour confectionner 80 palets est

$$V = 80 \times 2(F(\alpha) - F(\beta)) = 160(F(\alpha) - F(\beta)).$$

En prenant $\alpha = 0,41$ et $\beta = 3,61$, la calculatrice fournit $V = 895,6\ldots$ cm^3 ou encore $0,9$ litre arrondi à 10^{-2}. La contrainte de rentabilité est donc respectée.

 © Jean-Louis Rouget, 2018. Tous droits réservés.

EXERCICE 2

1) a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}$.

b) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}\right).\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BD}$.

$[AC]$ et $[BD]$ sont les diagonales du carré $ABCD$ et donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$.
D'autre part, la droite (AE) est perpendiculaire aux droites (AB) et (AD) qui sont deux droites sécantes du plan (ABD). On en déduit que la droite (AE) est perpendiculaire au plan (ABD). Mais alors, la droite (AE) est orthogonale à toute droite du plan (ABD) et en particulier, la droite (AE) est orthogonale à la droite (BD). Ceci fournit $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BD}=0$.

Finalement, $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}=0+0=0$.

c) La droite (AG) est orthogonale aux droites (BD) et (BE) qui sont deux droites sécantes du plan (BDE). Donc, la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2) a) Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, le point A a pour coordonnées $(0,0,0)$ et le point G a pour coordonnées $(1,1,1)$ (car $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=1\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AD}+1\overrightarrow{AE}$). Donc, le vecteur $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $(1,1,1)$.

Le plan (BDE) est le plan passant par $B(1,0,0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AG}(1,1,1)$. Une équation cartésienne de ce plan est $1\times(x-1)+1\times(y-0)+1\times(z-0)=0$ ou encore $x+y+z-1=0$.

b) La droite (AG) est la droite passant par $A(0,0,0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AG}(1,1,1)$. Une représentation paramétrique de la droite (AG) est $\left\{\begin{array}{l}x=t\\y=t\\z=t\end{array}\right)$, $t\in\mathbb{R}$. Soit donc $M(t,t,t)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de la droite (AG).

$$M\in(BDE)\Leftrightarrow t+t+t-1=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}.$$

Quand $t=\frac{1}{3}$, on obtient le point K de coordonnées $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

c) GK est donc la hauteur de la pyramide $BDGE$ associée à la base BDE. Ainsi, le volume de la pyramide
$V=\frac{1}{3}\times GK\times$ aire de BDE.
$GK=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2}=\sqrt{3\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Donc,

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{3}.$$

 © Jean-Louis Rouget, 2018. Tous droits réservés.

EXERCICE 3

Partie A

On assimile chaque classe à son milieu. Donc, la moyenne est

$$m = \frac{110 \times 1597 + 125 \times 1284 + 135 \times 2255 + 145 \times 1808 + 155 \times 1345 + 170 \times 1711}{1597 + 1284 + 2255 + 1808 + 1345 + 1711} = 140,21$$

et

$$\sigma = \sqrt{\frac{1597(110 - 140,21)^2 + 1284(125 - 140,21)^2 + 2255(135 - 140,21)^2 + 1808(145 - 140,21)^2 + \dots}{1597 + 1284 + 2255 + 1808 + 1345 + 1711}} = 19,16.$$

Partie B

1) a) La modélisation semble pertinente au vu des valeurs de μ et σ obtenues expérimentalement dans la partie A.

b) La calculatrice fournit $p = P(X \geqslant 60) = 0,146$ arrondi à 10^{-3}.

2) a) Ici, $n = 50$ et $p = 0,146$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 7,3 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 42,7 \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\begin{aligned}\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] &= \left[0,146 - 1,96\sqrt{\frac{0,146 \times 0,854}{50}}; 0,146 + 1,96\sqrt{\frac{0,146 \times 0,854}{50}}\right] \\ &= [0,048; 0,244]\end{aligned}$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \dfrac{13}{50} = 0,26$. Cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation et donc, au risque de se tromper de 5%, l'organisme peut affirmer qu'il y a une anomalie dans la production.

b) Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 99% est obtenu en remplaçant $u_{0,05} = 1,96$ par $u_{0,01} = 2,58$ ($u_{0,01}$ obtenu à la calculatrice à partir de $P\left(-u_{0,01} \leqslant X \leqslant u_{0,01}\right) = 1 - 0,01$ ou encore $P\left(X \leqslant u_{0,01}\right) = 0,995$).

$$\begin{aligned}\left[p - 2,58\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 2,58\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] &= \left[0,146 - 2,58\sqrt{\frac{0,146 \times 0,854}{50}}; 0,146 + 2,58\sqrt{\frac{0,146 \times 0,854}{50}}\right] \\ &= [0,017; 0,275]\end{aligned}$$

Cette fois-ci, f appartient à l'intervalle et on ne peut donc rien affirmer au risque de se tromper de 1%.

 © Jean-Louis Rouget, 2018. Tous droits réservés.

EXERCICE 4.

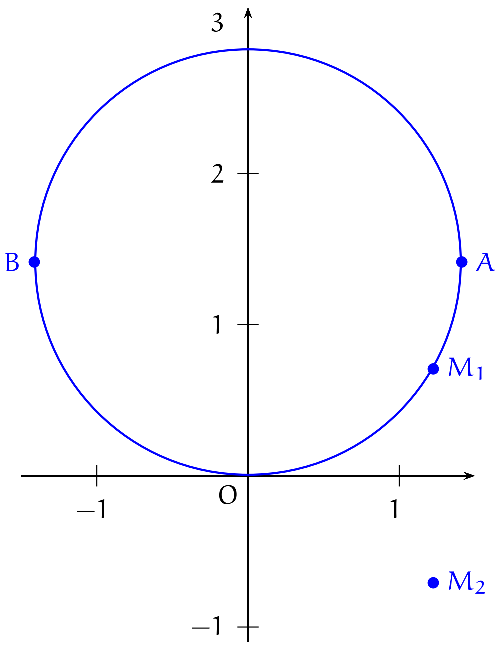
1) $OA = |z_A| = \left|2e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = |2|\left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = 2 \times 1 = 2$ et de même, $OB = |z_B| = 2$.
Ainsi, $OA = OB = 2$ et donc le triangle OAB est isocèle en O.

$z_A - z_B = 2\left(\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 2 \times \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$. Donc,

$$BA^2 = |z_A - z_B|^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8 = 2^2 + 2^2 = OA^2 + OB^2.$$

D'après la réciproque du théorème de PYTHAGORE, le triangle OAB est rectangle en O.

2) Le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = \left(-\sqrt{6}\right)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -2 < 0$. L'équation (E) admet deux solutions non réelles conjuguées $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$. On note M_1 le point d'affixe z_1 et M_2 le point d'affixe z_2.



Le triangle OAB est rectangle en O. Donc, le cercle circonscrit au triangle OAB est le cercle de diamètre $[AB]$ ou encore le cercle de centre Ω le milieu de $[AB]$ et de rayon $R = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{2}$. L'affixe de Ω est

$$z_\Omega = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = \frac{1}{2}\left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = i\sqrt{2}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\Omega M_1 = |z_{M_1} - z_\Omega| &= \left|\frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2} - i\sqrt{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|\sqrt{6} - i\sqrt{2}\right| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} = R.\end{aligned}$$

Donc, le point M_1 appartient au cercle circonscrit au triangle OAB.

 © Jean-Louis Rouget, 2018. Tous droits réservés.

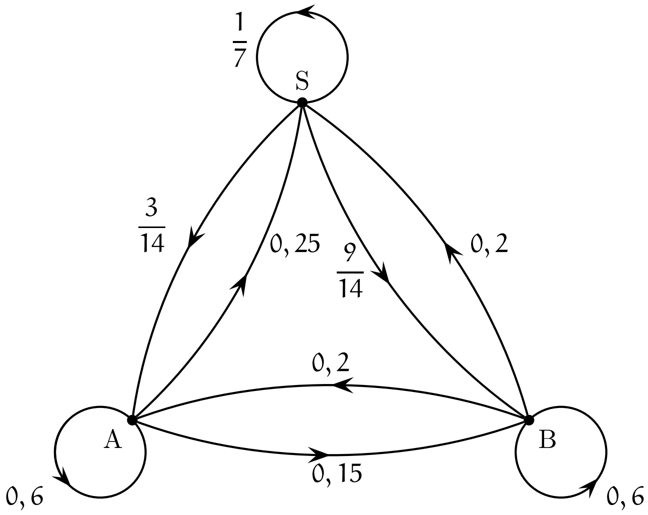
EXERCICE 5.

1) Notons A l'événement « le joueur rejoint l'équipe A sachant que le joueur était solitaire », B l'événement « le joueur rejoint l'équipe B sachant que le joueur était solitaire » et S l'événement « le joueur rejoint l'équipe S sachant que le joueur était solitaire ».

$$1 = P(A) + P(B) + P(S) = p + 3p + \frac{1}{7}$$

et donc $4p = \dfrac{6}{7}$ puis $p = \dfrac{6}{4 \times 7} = \dfrac{3}{2 \times 7} = \dfrac{3}{14}$.

2) a) Graphe complété.



b) Montrons par récurrence, que pour tout $n \geqslant 0$, $U_n = U_0 T^n$.

- $U_0 T^0 = U_0 I_3 = U_0$. l'égalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $U_n = U_0 T^n$. Alors

$$U_{n+1} = U_n T = U_0 T^n T = U_0 T^{n+1}.$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $U_n = U_0 T^n$.

c) La calculatrice fournit $U_7 = U_0 T^7 = \begin{pmatrix} 0,338 & 0,457 & 0,205 \end{pmatrix}$ arrondi au millième.

3) a) La calculatrice fournit $VT = \begin{pmatrix} 300 & 405 & 182 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 & 405 & 182 \end{pmatrix} = V$.

b) Soit $V' = \dfrac{1}{300 + 405 + 182} V = \dfrac{1}{887} V$. Alors $V'T = \dfrac{1}{887} VT = \dfrac{1}{887} V = V'$. Le vecteur $V' = \begin{pmatrix} \frac{300}{887} & \frac{405}{887} & \frac{182}{887} \end{pmatrix}$ a trois composantes positives de somme 1 et vérifie $V'T = V'$. V' décrit donc un état probabilistique stable d'un jour à l'autre.

4) a) $U[1]$ est le premier coefficient de U_7 c'est-à-dire la probabilité que le joueur appartienne à l'équipe A le jour n° 7. D'après la question 2)c), cette probabilité est : $0,338$ arrondi au millième.

 © Jean-Louis Rouget, 2018. Tous droits réservés.

b) Algorithme modifié.

Variables	k un entier naturel U une matrice de taille 1×3 T une matrice carrée d'ordre 3
Traitement	U prend la valeur $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ T prend la valeur $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$ Pour k allant de 1 à 13 U prend la valeur UT Fin Pour
Sortie	Afficher $U[3]$

 © Jean-Louis Rouget, 2018. Tous droits réservés.