

BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

EXERCICE 1 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Les trois parties sont indépendantes. Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie 1

On estime qu'en 2013 la population mondiale est composée de 4,6 milliards de personnes âgées de 20 à 79 ans et que 46,1 % des personnes âgées de 20 à 79 ans vivent en zone rurale et 53,9 % en zone urbaine.

En 2013, d'après la fédération internationale du diabète, 9,9 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone urbaine est atteinte de diabète et 6,4 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone rurale est atteinte de diabète.

On interroge au hasard une personne âgée de 20 à 79 ans. On note :

R l'évènement : « la personne choisie habite en zone rurale »,

D l'évènement : « la personne choisie est atteinte de diabète ».

- 1) Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.
- 2) a) Calculer la probabilité que la personne interrogée soit diabétique.
b) La personne choisie est diabétique. Quelle est la probabilité qu'elle habite en zone rurale ?

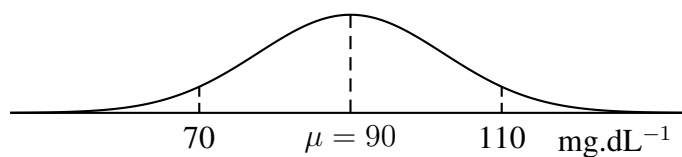
Partie 2

Une personne est dite en hypoglycémie si sa glycémie à jeun est inférieure à 60 mg.dL^{-1} et elle est en hyperglycémie si sa glycémie à jeun est supérieure à 110 mg.dL^{-1} . La glycémie à jeun est considérée comme « normale » si elle est comprise entre 70 mg.dL^{-1} et 110 mg.dL^{-1} . Les personnes ayant un taux de glycémie compris entre 60 et 70 mg.dL^{-1} ne font pas l'objet d'un suivi particulier.

On choisit au hasard un adulte dans cette population. Une étude a permis d'établir que la probabilité qu'il soit en hyperglycémie est $0,052$ à 10^{-3} près. Dans la suite on admettra que cette probabilité est égale à $0,052$.

On modélise la glycémie à jeun, exprimée en mg.dL^{-1} , d'un adulte d'une population donnée, par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ .

On donne ci-dessous la représentation graphique de la densité de probabilité de la variable aléatoire X .



- 1) Quelle est la probabilité que la personne choisie ait une glycémie à jeun « normale » ?
- 2) Déterminer la valeur de σ arrondie au dixième.
- 3) Dans cette question, on prend $\sigma = 12$. Calculer la probabilité que la personne choisie soit en hypoglycémie.

Partie 3

Afin d'estimer la proportion, pour l'année 2013, de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans, on interroge au hasard 10 000 personnes.

Dans l'échantillon étudié, 716 personnes ont été diagnostiquées diabétiques.

- 1) A l'aide d'un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %, estimer la proportion de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans.
- 2) Quel doit être le nombre minimal de personnes à interroger si l'on veut obtenir un intervalle de confiance d'amplitude inférieure ou égale à $0,01$?

EXERCICE 2 (4 points)

(commun à tous les candidats)

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geq 0$ par la donnée de z_0 , où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}.$$

- 1) a) Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. Déterminer les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6 .
b) Dans cette question, on suppose que $z_0 = i$. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6 .
c) Dans cette question, on revient au cas général où z_0 est un complexe donné. Que peut-on conjecturer pour les valeurs prises par z_{3n} selon les valeurs de l'entier naturel n ?
Prouver cette conjecture.
- 2) Déterminer z_{2016} dans le cas où $z_0 = 1 + i$.
- 3) Existe-t-il des valeurs de z_0 telles que $z_0 = z_1$? Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas?

EXERCICE 3 (5 points)

(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 3 pièces A, B et C ayant chacune un côté pile et un côté face.

Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.

Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on retourne la pièce C.

Au début du jeu, les 3 pièces sont toutes du côté face.

1) Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face et 1 code le côté pile. Si a code un côté de la pièce A, alors $1 - a$ code l'autre côté de la pièce A.

Variables :	a, b, c, d, s sont des entiers i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :	a prend la valeur 0 b prend la valeur 0 c prend la valeur 0 Saisir n
Traitement :	Pour i allant de 1 à n faire d prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 6 Si $d \leq 2$ alors a prend la valeur $1 - a$ sinon Si $d \leq 4$ alors b prend la valeur $1 - b$ sinon c prend la valeur $1 - c$ FinSi FinSi s prend la valeur $a + b + c$ FinPour
Sortie :	Afficher s

a) On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 4 et 2. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	d	a	b	c	s
initialisation	X	X				X
1 ^{er} passage boucle Pour						
2 ^e passage boucle Pour						
3 ^e passage boucle Pour						

b) Cet algorithme permet-il de savoir si, après une exécution de n tirages, les trois pièces sont du côté pile ?

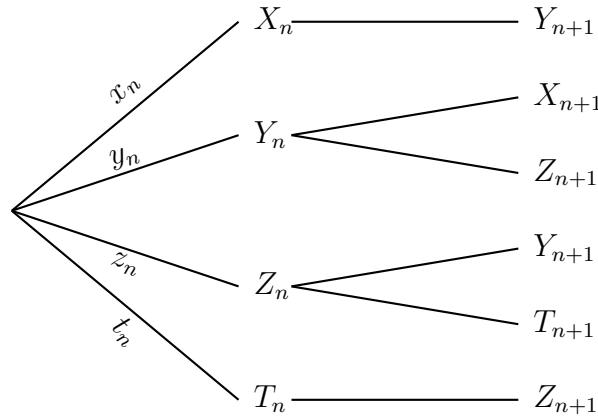
2) Pour tout entier naturel n , on note :

- X_n l'évènement : « A l'issue de n lancers de dés, les trois pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « A l'issue de n lancers de dés, une seule pièce est du côté pile et les autres sont du côté face »
- Z_n l'évènement : « A l'issue de n lancers de dés, exactement deux pièces sont du côté pile et l'autre est du côté face ».

- T_n l'évènement : « A l'issue de n lancers de dés, les trois pièces sont du côté pile ».

De plus on note, $x_n = P(X_n)$; $y_n = P(Y_n)$, $z_n = P(Z_n)$ et $t_n = P(T_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n, Z_n et T_n .

- Donner les probabilités x_0, y_0, z_0 et t_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1, 2 ou 3 pièces du côté pile.
- Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les probabilités sur ses branches :



3) Pour tout entier naturel n , on note U_n la matrice ligne $(x_n \ y_n \ z_n \ t_n)$.

- Donner la matrice U_0 .
- A l'aide de l'arbre précédemment rempli, déterminer la matrice carrée M telle que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = U_n \times M$.

4) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $U_n = U_0 \times M^n$.

5) On admet que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$x_n = \frac{(-1)^n + 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}{8};$$

$$y_n = \frac{-3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - (-1)^n \times 3 + 3}{8};$$

$$z_n = \frac{-3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n - 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + (-1)^n \times 3 + 3}{8};$$

$$t_n = \frac{-(-1)^n + 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n - 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}{8}.$$

- Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au bout de 5 lancers de dés, une seule des trois pièces soit du côté pile.
- Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte
 - Première affirmation : « A l'issue d'un nombre pair de lancers de dés, les pièces peuvent être toutes les trois du côté pile ».
 - Deuxième affirmation : « Au cours du jeu, la probabilité que les pièces soient toutes les trois du côté pile peut être supérieure ou égale à $\frac{1}{4}$ ».
 - Troisième affirmation : « Au cours du jeu, la probabilité que les pièces soient toutes les trois du côté pile peut être supérieure ou égale à 0,249 ».

EXERCICE 4 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Un hélicoptère est en vol stationnaire au-dessus d'une plaine. Un passager lâche verticalement un colis muni d'un parachute.

Partie 1

Soit v_1 la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$v_1(t) = 5 \times \frac{e^{0,3t} - 1}{e^{0,3t} + 1}.$$

- 1) Déterminer le sens de variation de la fonction v_1 .
- 2) On suppose, dans cette question, que le parachute fonctionne correctement.
On admet que t secondes après qu'il a été lâché, la vitesse du colis (exprimée en m.s^{-1}) est égale, avant d'atteindre le sol, à $v_1(t)$.
On considère que le colis arrive en bon état sur le sol si sa vitesse à l'arrivée n'excède pas 6 m.s^{-1} .
Le colis risque-t-il d'être endommagé lorsque le parachute s'ouvre correctement ? Justifier.

Partie 2

On suppose, dans cette partie, que le parachute ne s'ouvre pas.

On admet que, dans ce cas, avant que le colis atteigne le sol, sa vitesse (exprimée en m.s^{-1}), t secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par :

$$v_2(t) = 32,7 (1 - e^{-0,3t}).$$

- 1) Quelle est la vitesse, exprimée en m.s^{-1} , atteinte par le colis au bout de 10 secondes ?
Arrondir à $0,1 \text{ m.s}^{-1}$.
- 2) Résoudre l'équation $v_2(t) = 30 \text{ m.s}^{-1}$. Donner une interprétation concrète de la solution de cette équation dans le cadre de cet exercice.
- 3) On sait que la chute du colis dure 20 secondes.
On admet que la distance, en mètres, qui sépare l'hélicoptère du colis, T secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par :
$$d(T) = \int_0^T v_2(t) dt.$$
 - a) Montrer que, pour tout réel T de l'intervalle $[0 ; 20]$, $d(T) = 109 (e^{-0,3T} + 0,3T - 1)$.
 - b) Déterminer une valeur approchée à 1 m près de la distance parcourue par le colis lorsqu'il atteint le sol.
- 4) Déterminer un encadrement d'amplitude 0,1 s du temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres.