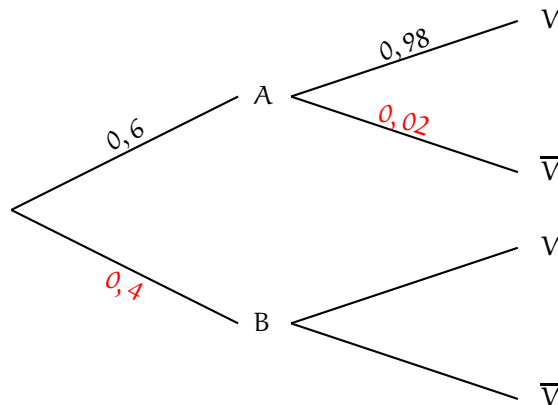


Rochambeau. 2016. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) L'énoncé donne $P(V) = 0,96$, $P(A) = 0,6$ et $P_A(V) = 0,98$. Représentons la situation par un arbre de probabilités.



La probabilité demandée est $P(A \cap V)$.

$$P(A \cap V) = P(A) \times P_A(V) = 0,6 \times 0,98 = 0,588.$$

2) D'après la formule des probabilités totales, $P(V) = P(A \cap V) + P(B \cap V)$ et donc

$$P(B \cap V) = P(V) - P(A \cap V) = 0,96 - 0,588 = 0,372.$$

Ensuite,

$$P_B(V) = \frac{P(B \cap V)}{P(B)} = \frac{0,372}{0,4} = 0,93.$$

3) La probabilité demandée est $P_{\bar{V}}(B)$.

$$P_{\bar{V}}(B) = \frac{P(\bar{V} \cap B)}{P(\bar{V})} = \frac{P(B) - P(V \cap B)}{1 - (P(A \cap V) + P(B \cap V))} = \frac{0,4 - 0,372}{1 - (0,372 + 0,588)} = \frac{0,028}{0,04} = 0,7.$$

Le technicien a donc raison.

Partie B

1) La probabilité demandée est $P(0,9 \leq X \leq 1,1)$. La calculatrice fournit $P(0,9 \leq X \leq 1,1) = 0,9309\dots$ ou encore $P(0,9 \leq X \leq 1,1) = 0,93$ au centième près.

D'autre part, $P_B(V) = \frac{P(B \cap V)}{P(B)} = \frac{0,372}{0,4} = 0,93$. Donc, la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable est bien égale au centième près à celle de la partie A.

2) $0,9 \leq Y \leq 1,1 \Leftrightarrow -0,1 \leq Y - 1 \leq 0,1 \Leftrightarrow -\frac{0,1}{\sigma'} \leq \frac{Y-1}{\sigma'} \leq \frac{0,1}{\sigma'}$. On sait que la variable $Z = \frac{Y-1}{\sigma'}$ suit la loi normale centrée réduite et de plus, $P(0,9 \leq Y \leq 1,1) = P\left(-\frac{0,1}{\sigma'} \leq Z \leq \frac{0,1}{\sigma'}\right)$. Ensuite, pour des raisons de symétries,

$$P\left(Z \leq \frac{0,1}{\sigma'}\right) = P\left(-\frac{0,1}{\sigma'} \leq Z \leq \frac{0,1}{\sigma'}\right) + P\left(Z \leq -\frac{0,1}{\sigma'}\right) = 0,98 + \frac{0,02}{2} = 0,99.$$

La calculatrice fournit

$$P\left(Z \leq \frac{0,1}{\sigma'}\right) = 0,99 \Leftrightarrow \frac{0,1}{\sigma'} = 2,3263\dots \Leftrightarrow \sigma' = 0,0429\dots$$

Donc, $\sigma' = 0,043$ arrondi à 10^{-3} .

Partie C

1) a) Notons X la variable aléatoire égale au nombre de billes noires dans le sachet.

- 40 expériences identiques et indépendantes sont effectuées.

• chaque expérience a deux issues à savoir « la bille est noire » avec une probabilité $p = \frac{1}{5}$ et « la bille n'est pas noire » avec une probabilité $1 - p = \frac{4}{5}$.

X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = \frac{1}{5}$. La probabilité demandée est $P(X = 10)$. On sait que

$$P(X = 10) = \binom{40}{10} \left(\frac{1}{5}\right)^{10} \left(\frac{4}{5}\right)^{40-10} = 0,107 \text{ arrondi à } 10^{-3}$$

(fourni par la calculatrice).

b) Déterminons un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95%. Ici, $n = 40$ et $p = \frac{1}{5} = 0,2$. On note que $n \geq 30$, $np = 8$ et $n(1 - p) = 32$ de sorte que $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$. Un intervalle de fluctuation est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] = \left[0,2 - 1,96\sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{40}}, 0,25 + 1,96\sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{40}} \right] = [0,07; 0,33]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \frac{12}{40} = 0,3$. Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation et donc on ne peut pas remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes.

2) Soit n le nombre de billes dans un sachet. Le nombre de billes noires de ce sachet est une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,2$. La probabilité que le sachet contienne au moins une bille noire est

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0,8)^n.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) \geq 0,99 &\Leftrightarrow 1 - (0,8)^n \geq 0,99 \Leftrightarrow 0,01 \geq (0,8)^n \Leftrightarrow (0,8)^n \leq 0,01 \\ &\Leftrightarrow \ln((0,8)^n) \leq \ln(0,01) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow n \ln(0,8) \leq \ln(0,01) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \text{ (car } \ln(0,8) < 0) \\ &\Leftrightarrow n \geq 20,6\dots \\ &\Leftrightarrow n \geq 21 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

Le nombre minimal de billes que doit contenir un sachet pour avoir une probabilité supérieure à 0,99 d'avoir au moins une bille noire est 21.

EXERCICE 2

Partie A

1) $f(x_B) = f(2e) = 2e \ln\left(\frac{2e}{2}\right) - 2e + 2 = 2e - 2e + 2 = 2 = y_B$. Donc, le point B appartient à la courbe \mathcal{C}_f .

$f(x_I) = f(2) = 2e \ln\left(\frac{2}{2}\right) - 2 + 2 = -2 + 2 = 0 = y_I$. Donc, le point I appartient à la courbe \mathcal{C}_f .

La fonction f est dérivable sur $[2, 2e]$ et pour tout x de $[2, 2e]$,

$$f'(x) = 1 \times \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \frac{1/2}{x/2} - 1 = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 1 - 1 = \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Par suite, $f'(x_I) = \ln\left(\frac{2}{2}\right) = \ln(1) = 0$. On en déduit que l'axe des abscisses est tangent à la courbe \mathcal{C}_f en I.

2) a) On a déjà $x_B = 2e$ et $f(x_B) = 2$. Ensuite, $f'(x_B) = f'(2e) = \ln\left(\frac{2e}{2}\right) = \ln(e) = 1$. Une équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point B est $y = 2 + 1 \times (x - 2e)$ ou encore $y = x + 2 - 2e$.

Ensuite, $x + 2 - 2e = 0 \Leftrightarrow x = 2e - 2$. Le point D a donc pour coordonnées $(2e - 2, 0)$.

b) L'aire, exprimée en m^2 , du triangle ABI vaut $\frac{AB \times AI}{2}$ ou encore $\frac{(2e - 2) \times 2}{2}$ ou enfin $2e - 2$.

L'aire, exprimée en m^2 , du trapèze AIDB vaut $\frac{(AB + ID) \times AI}{2}$ ou encore $\frac{((2e - 2) + (2e - 4)) \times 2}{2}$ ou enfin $4e - 6$.
On en déduit que

$$2e - 2 \leq S \leq 4e - 6.$$

Ceci fournit pour le volume V , exprimé en m^3 , de la cuve :

$$10e - 10 \leq V \leq 20e - 30.$$

Ceci fournit encore $17,1 \leq V \leq 24,4$.

3) a) La fonction G est dérivable sur $[2, 2e]$ et pour tout x de $[2, 2e]$,

$$G'(x) = \frac{2x}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2} \frac{1/2}{x/2} - \frac{2x}{4} = x \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x \ln\left(\frac{x}{2}\right) = g(x).$$

Donc, la fonction G est une primitive de la fonction g sur $[2, 2e]$.

b) Une primitive de la fonction f sur $[2, 2e]$ est alors la fonction $F : x \mapsto \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x$ ou encore
 $F : x \mapsto \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3x^2}{4} + 2x$

c)

$$\begin{aligned} S &= \int_2^{2e} (2 - f(x)) \, dx = \left[2x - \left(\frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3x^2}{4} + 2x \right) \right]_2^{2e} \\ &= - \left(\frac{(2e)^2}{2} \ln\left(\frac{2e}{2}\right) - \frac{3(2e)^2}{4} \right) + \left(\frac{2^2}{2} \ln\left(\frac{2}{2}\right) - \frac{3 \times 2^2}{4} \right) \\ &= -2e^2 + 3e^2 - 3 = e^2 - 3, \end{aligned}$$

puis

$$V = 5(e^2 - 3) = 22 \, m^3 \text{ arrondi au mètre cube.}$$

Partie B

1) Notons V_0 le volume cherché.

La fonction f est continue sur $[2, 2e]$ et croît strictement de 0 à 2 sur cet intervalle. Donc, existe un réel x_0 et un seul dans l'intervalle $[2, 2e]$ tel que $f(x_0) = 1$.

La calculatrice fournit $f(4,3) = 0,99 \dots < 1$ et $f(4,4) = 1,06 \dots > 1$. Puisque la fonction f est croissante sur $[2, 2e]$, on en déduit que $4,3 \leq x_0 \leq 4,4$.

Quand x augmente, la hauteur d'eau dans la cuve augmente puis le volume d'eau dans la cuve augmente. Donc, la fonction v est croissante sur $[2, 2e]$. On en déduit que

$$v(4, 3) \leq V_0 \leq v(4, 4).$$

La calculatrice fournit $v(4, 3) = 7,3\dots$ et $v(4, 4) = 8,2\dots$ et on en déduit que $V_0 = 8 \text{ m}^3$ au m^3 près.

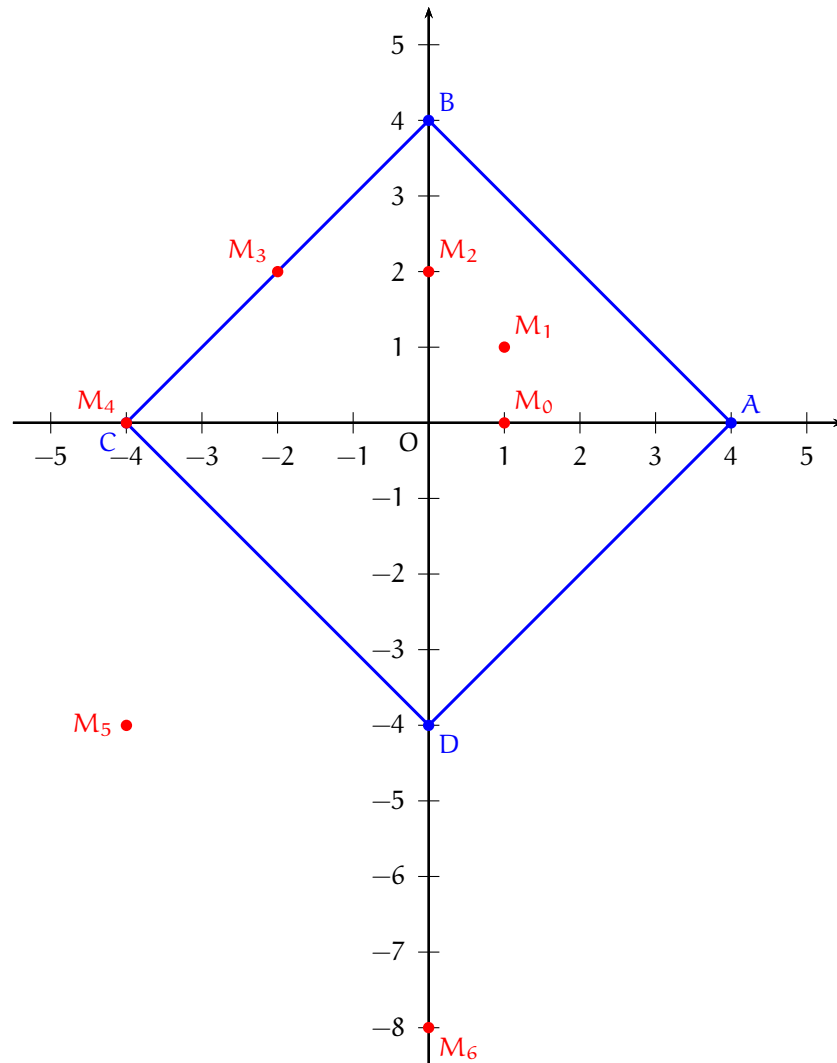
2) L'algorithme affiche une valeur approchée de la hauteur d'eau dans la cuve pour laquelle le volume d'eau dans la cuve vaut la moitié du volume total à 10^{-3} près.

EXERCICE 3

1) $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ puis

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

2) Graphique.



Soit n un entier naturel. La plus grande distance du point O à un point du carré $ABCD$ est $OA = 4$. Donc, on est sûr que le point M_n est à l'extérieur du carré si $OM_n > 4$.

$$\begin{aligned} OM_n > 4 &\Leftrightarrow |z_n| > 4 \Leftrightarrow |1 + i|^n > 4 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n > 4 \\ &\Leftrightarrow \ln\left((\sqrt{2})^n\right) > \ln(4) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow n \ln(\sqrt{2}) > 2 \ln(2) \Leftrightarrow \frac{n}{2} \ln(2) > 2 \ln(2) \Leftrightarrow \frac{n}{2} > 2 \Leftrightarrow n > 4 \\ &\Leftrightarrow n \geq 5. \end{aligned}$$

Donc, l'entier $n_0 = 5$ convient. On note que, puisque $M_4 = C$, 5 est la plus petite valeur possible de n_0 .

EXERCICE 4

1) On sait déjà que $\|\vec{OB}\| = \|\vec{OC}\| = 1$ et que $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = 0$ (les diagonales d'un carré sont perpendiculaires et de même longueur).

Ensuite, la droite (OS) est perpendiculaire au plan (ABC) et donc orthogonale à toute droite de ce plan. On en déduit que $\vec{OS} \cdot \vec{OB} = \vec{OS} \cdot \vec{OC} = 0$.

Ensuite, d'après le théorème de PYTHAGORE, $AB^2 = AO^2 + OB^2 = 2$ et donc $AB = \sqrt{2}$. Puisque le triangle (ABS) est équilatéral, on a aussi $BS = \sqrt{2}$. De nouveau, le théorème de PYTHAGORE fournit $BS^2 = BO^2 + OS^2$ et donc

$$OS^2 = BS^2 - BO^2 = 2 - 1 = 1,$$

puis $\|\vec{OS}\| = 1$. On a montré que le repère $(O, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OS})$ est orthonormé.

2) a) Le point D a pour coordonnées $(-1, 0, 0)$ et le point S a pour coordonnées $(0, 0, 1)$. Donc le vecteur \vec{SD} a pour coordonnées $(-1, 0, -1)$. Par suite,

$$\vec{SK} = \frac{1}{3}\vec{SD} \Rightarrow \begin{cases} x_K - 0 = \frac{1}{3} \times (-1) \\ y_K - 0 = \frac{1}{3} \times 0 \\ z_K - 1 = \frac{1}{3} \times (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_K = -\frac{1}{3} \\ y_K = 0 \\ z_K = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Le point K a pour coordonnées $(-\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})$.

b) Le point B a pour coordonnées $(1, 0, 0)$ et le point I a pour coordonnées $(0, 0, \frac{1}{2})$. Donc le vecteur \vec{BI} a pour coordonnées $(-1, 0, \frac{1}{2})$. D'autre part, le vecteur \vec{BK} a pour coordonnées $(-\frac{4}{3}, 0, \frac{2}{3})$. Par suite, $\frac{4}{3}\vec{BI} = \vec{BK}$. Ainsi, les vecteurs \vec{BI} et \vec{BK} sont colinéaires ou encore les points B, I et K sont alignés.

c) Les plans (ADS) et (BCI) ne sont pas parallèles. Ces plans sont sécants en une droite (Δ) . Les points K et L sont deux points distincts appartenant aux plans (ADS) et (BCI) et donc à (Δ) . On en déduit que $(\Delta) = (KL)$.

Ainsi, les plans (ADS) et (BCI) sont sécants selon la droite (KL) . De plus, (AD) est une droite du plan (ADS) et (BC) est une droite du plan (BCS) et les droites (AD) et (BC) sont parallèles. D'après le théorème du toit, la droite est parallèle aux droites (AD) et (BC) et en particulier, les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

d) On a $\vec{SK} = \frac{1}{3}\vec{SD}$ et la droite (KL) est parallèle à la droite (AD) . D'après le théorème de THALÈS dans le triangle

(SAD) , $\vec{KL} = \frac{1}{3}\vec{DA}$. Puisque le vecteur \vec{DA} a pour coordonnées $(1, -1, 0)$, on a $\begin{cases} x_L + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ y_L - 0 = -\frac{1}{3} \\ z_K - \frac{2}{3} = 0 \end{cases}$ et donc le point L a

pour coordonnées $(0, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

3) a) Le vecteur \vec{BC} a pour coordonnées $(-1, 1, 0)$ et le vecteur \vec{BI} a pour coordonnées $(-1, 0, \frac{1}{2})$.

$$\vec{n} \cdot \vec{BC} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 2 \times 0 = -1 + 1 = 0$$

et

$$\vec{n} \cdot \vec{BI} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 2 \times \frac{1}{2} = -1 + 1 = 0.$$

Donc, le vecteur \vec{n} est orthogonal aux vecteurs \vec{BC} et \vec{BI} qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (BCI) . On en déduit que le vecteur \vec{n} est un vecteur normal au plan (BCI) .

b) Le vecteur \vec{AS} a pour coordonnées $(0, 1, 1)$ et le vecteur \vec{DS} a pour coordonnées $(1, 0, 1)$. Donc, $\vec{n} = \vec{DS} + \vec{AS}$. Ceci montre que les vecteurs \vec{n} , \vec{AS} et \vec{DS} sont coplanaires.

c) Soit \vec{n}' un vecteur normal au plan (SAD) . On sait que le vecteur \vec{n}' est orthogonal à tout vecteur du plan (SAD) . Donc,

$$\vec{n}' \cdot \vec{n} = \vec{n}' \cdot (\vec{DS} + \vec{AS}) = \vec{n}' \cdot \vec{DS} + \vec{n}' \cdot \vec{AS} = 0 + 0 = 0.$$

Ainsi, les vecteurs \vec{n} et \vec{n}' sont orthogonaux et donc les plans (BCI) et (SAD) sont perpendiculaires.