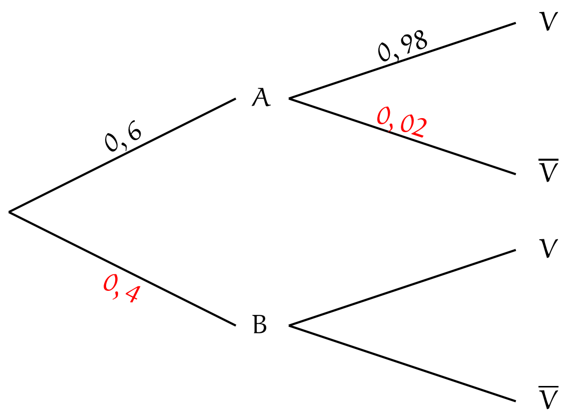
Rochambeau. 2016. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) L'énoncé donne $P(V) = 0,96$, $P(A) = 0,6$ et $P_A(V) = 0,98$. Représentons la situation par un arbre de probabilités.



La probabilité demandée est $P(A \cap V)$.

$$P(A \cap V) = P(A) \times P_A(V) = 0,6 \times 0,98 = 0,588.$$

2) D'après la formule des probabilités totales, $P(V) = P(A \cap V) + P(B \cap V)$ et donc

$$P(B \cap V) = P(V) - P(A \cap V) = 0,96 - 0,588 = 0,372.$$

Ensuite,

$$P_B(V) = \frac{P(B \cap V)}{P(B)} = \frac{0,372}{0,4} = 0,93.$$

3) La probabilité demandée est $P_V(B)$.

$$P_{\overline{V}}(B) = \frac{P\left(\overline{V} \cap B\right)}{p(V)} = \frac{P(B) - P(V \cap B)}{1 - (P(A \cap V) + P(B \cap V))} = \frac{0,4 - 0,372}{1 - (0,372 + 0,588)} = \frac{0,028}{0,0,04} = 0,7.$$

Le technicien a donc raison.

Partie B

1) La probabilité demandée est $P(0,9 \leqslant X \leqslant 1,1)$. La calculatrice fournit $P(0,9 \leqslant X \leqslant 1,1) = 0,9309\ldots$ ou encore $P(0,9 \leqslant X \leqslant 1,1) = 0,93$ au centième près.

D'autre part, $P_B(V) = \dfrac{P(B \cap V)}{P(B)} = \dfrac{0,372}{0,4} = 0,93$. Donc, la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable est bien égale au centième près à celle de la partie A.

2) $0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1 \Leftrightarrow -0,1 \leqslant Y - 1 \leqslant 0,1 \Leftrightarrow -\dfrac{0,1}{\sigma'} \leqslant \dfrac{Y-1}{\sigma'} \leqslant \dfrac{0,1}{\sigma'}$. On sait que la variable $Z = \dfrac{Y-1}{\sigma'}$ suit la loi normale centrée réduite et de plus, $P\left(0,9 \leqslant Y \leqslant 1,1\right) = P\left(-\dfrac{0,1}{\sigma'} \leqslant Z \leqslant \dfrac{0,1}{\sigma'}\right)$. Ensuite, pour des raisons de symétries,

$$P\left(Z \leqslant \frac{0,1}{\sigma'}\right) = P\left(-\frac{0,1}{\sigma'} \leqslant Z \leqslant \frac{0,1}{\sigma'}\right) + P\left(Z \leqslant -\frac{0,1}{\sigma'}\right) = 0,98 + \frac{0,02}{2} = 0,99.$$

La calculatrice fournit

$$P\left(Z \leqslant \frac{0,1}{\sigma'}\right) = 0,99 \Leftrightarrow \frac{0,1}{\sigma'} = 2.3263\ldots \Leftrightarrow \sigma' = 0,0429\ldots$$

Donc, $\sigma' = 0,043$ arrondi à 10^{-3}.

Partie C

1) a) Notons X la variable aléatoire égale au nombre de billes noires dans le sachet.
- 40 expériences identiques et indépendantes sont effectuées.
- chaque expérience a deux issues à savoir « la bille est noire » avec une probabilité $p = \frac{1}{5}$ et « la bille n'est pas noire » avec une probabilité $1 - p = \frac{4}{5}$.

X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = \frac{1}{5}$. La probabilité demandée est $P(X = 10)$. On sait que

$$P(X = 10) = \binom{40}{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{40-10} = 0,107 \text{ arraondi à } 10^{-3}$$

(fourni par la calculatrice).

b) Déterminons un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95%. Ici, $n = 40$ et $p = \frac{1}{5} = 0,2$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 8$ et $n(1-p) = 32$ de sorte que $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,2 - 1,96\sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{40}}, 0,25 + 1,96\sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{40}}\right] = [0,07; 0,33]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \frac{12}{40} = 0,3$. Cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation et donc on ne peut pas remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes.

2) Soit n le nombre de billes dans un sachet. Le nombre de billes noires de ce sachet est une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,2$. La probabilité que le sachet contienne au moins une bille noire est

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0,8)^n.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\Leftrightarrow 1 - (0,8)^n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow 0,01 \geqslant (0,8)^n \Leftrightarrow (0,8)^n \leqslant 0,01 \\
&\Leftrightarrow \ln\left((0,8)^n\right) \leqslant \ln(0,01) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln(0,8) \leqslant \ln(0,01) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \text{ (car } \ln(0,8) < 0) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 20,6\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 21 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

Le nombre minimal de billes que doit contenir un sachet pour avoir une probabilité supérieure à $0,99$ d'avoir au moins une bille noire est 21.

EXERCICE 2

Partie A

1) $f(x_B) = f(2e) = 2e\ln\left(\dfrac{2e}{2}\right) - 2e + 2 = 2e - 2e + 2 = 2 = y_B$. Donc, le point B appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.

$f(x_I) = f(2) = 2e\ln\left(\dfrac{2}{2}\right) - 2 + 2 = -2 + 2 = 0 = y_I$. Donc, le point I appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.

La fonction f est dérivable sur $[2, 2e]$ et pour tout x de $[2, 2e]$,

$$f'(x) = 1 \times \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \frac{1/2}{x/2} - 1 = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 1 - 1 = \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Par suite, $f'(x_I) = \ln\left(\dfrac{2}{2}\right) = \ln(1) = 0$. On en déduit que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ en I.

2) a) On a déjà $x_B = 2e$ et $f(x_B) = 2$. Ensuite, $f'(x_B) = f'(2e) = \ln\left(\dfrac{2e}{2}\right) = \ln(e) = 1$. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B est $y = 2 + 1 \times (x - 2e)$ ou encore $y = x + 2 - 2e$.

Ensuite, $x + 2 - 2e = 0 \Leftrightarrow x = 2e - 2$. Le point D a donc pour coordonnées $(2e - 2, 0)$.

b) L'aire, exprimée en m^2, du triangle ABI vaut $\dfrac{AB \times AI}{2}$ ou encore $\dfrac{(2e-2) \times 2}{2}$ ou enfin $2e - 2$.

L'aire, exprimée en m^2, du trapèze $AIDB$ vaut $\dfrac{(AB + ID) \times AI}{2}$ ou encore $\dfrac{((2e-2) + (2e-4)) \times 2}{2}$ ou enfin $4e - 6$.

On en déduit que

$$2e - 2 \leqslant S \leqslant 4e - 6.$$

Ceci fournit pour le volume V, exprimé en m^3, de la cuve :

$$10e - 10 \leqslant V \leqslant 20e - 30.$$

Ceci fournit encore $17,1 \leqslant V \leqslant 24,4$.

3) a) La fonction G est dérivable sur $[2, 2e]$ et pour tout x de $[2, 2e]$,

$$G'(x) = \frac{2x}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2}\frac{1/2}{x/2} - \frac{2x}{4} = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) = g(x).$$

Donc, la fonction G est une primitive de la fonction g sur $[2, 2e]$.

b) Une primitive de la fonction f sur $[2, 2e]$ est alors la fonction $F : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^2}{2} + 2x$ ou encore $F : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{3x^2}{4} + 2x$

c)

$$\begin{aligned} S &= \int_2^{2e} (2 - f(x))\,dx = \left[2x - \left(\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3x^2}{4} + 2x\right)\right]_2^{2e} \\ &= -\left(\frac{(2e)^2}{2}\ln\left(\frac{2e}{2}\right) - \frac{3(2e)^2}{4}\right) + \left(\frac{2^2}{2}\ln\left(\frac{2}{2}\right) - \frac{3 \times 2^2}{4}\right) \\ &= -2e^2 + 3e^2 - 3 = e^2 - 3, \end{aligned}$$

puis

$$V = 5\left(e^2 - 3\right) = 22 \text{ m}^3 \text{ arrondi au mètre cube.}$$

Partie B

1) Notons V_0 le volume cherché.

La fonction f est continue sur $[2, 2e]$ et croît strictement de 0 à 2 sur cet intervalle. Donc, existe un réel x_0 et un seul dans l'intervalle $[2, 2e]$ tel que $f(x_0) = 1$.

La calculatrice fournit $f(4,3) = 0,99\ldots < 1$ et $f(4,4) = 1,06\ldots > 1$. Puisque la fonction f est croissante sur $[2, 2e]$, on en déduit que $4,3 \leqslant x_0 \leqslant 4,4$.

Quand x augmente, la hauteur d'eau dans la cuve augmente puis le volume d'eau dans la cuve augmente. Donc, la fonction v est croissante sur $[2, 2e]$. On en déduit que

$$v(4,3) \leqslant V_0 \leqslant v(4,4).$$

La calculatrice fournit $v(4,3) = 7,3\ldots$ et $v(4,4) = 8,2\ldots$ et on en déduit que $V_0 = 8$ m^3 au m^3 près.

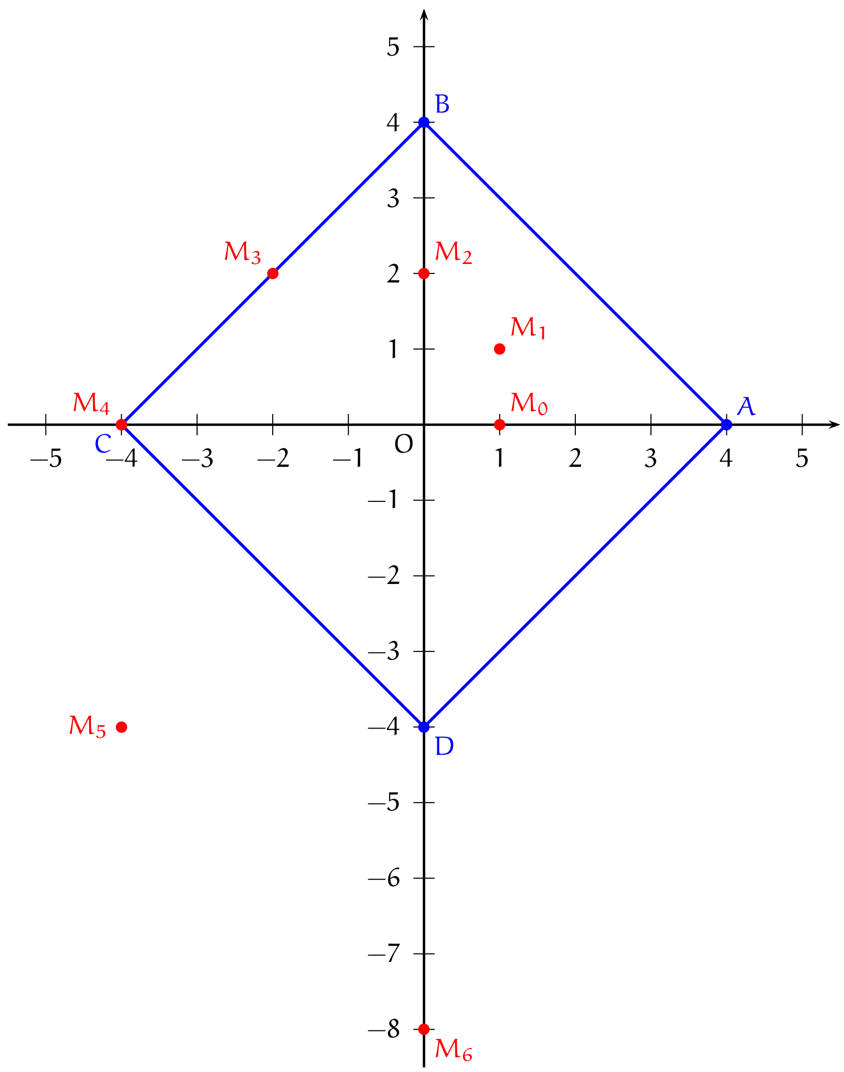
2) L'algorithme affiche une valeur approchée de la hauteur d'eau dans la cuve pour laquelle le volume d'eau dans la cuve vaut la moitié du volume total à 10^{-3} près.

EXERCICE 3

1) $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ puis

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

2) Graphique.



Soit n un entier naturel. La plus grande distance du point O à un point du carré ABCD est $OA = 4$. Donc, on est sûr que le point M_n est à l'extérieur du carré si $OM_n > 4$.

$$\begin{aligned}
OM_n > 4 &\Leftrightarrow |z_n| > 4 \Leftrightarrow |1+i|^n > 4 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n > 4 \\
&\Leftrightarrow \ln\left(\left(\sqrt{2}\right)^n\right) > \ln(4) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln\left(\sqrt{2}\right) > 2\ln(2) \Leftrightarrow \frac{n}{2}\ln(2) > 2\ln(2) \Leftrightarrow \frac{n}{2} > 2 \Leftrightarrow n > 4 \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 5.
\end{aligned}$$

Donc, l'entier $n_0 = 5$ convient. On note que, puisque $M_4 = C$, 5 est la plus petite valeur possible de n_0.

EXERCICE 4

1) a) $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)$ est la probabilité que l'urne U contienne une blanche après le $(n+1)$-ème tirage sachant que le U contient une boule blanche après le n-ème tirage.

Si $X_n = 0$, il y a deux boules noires dans l'urne U après le n-ème tirage et deux boules blanches dans l'urne V. Numérotons B_1, B_2 les deux boules blanches et N_1, N_2 les deux boules noires. L'urne contient donc (N_1, N_2) et l'urne V contient (B_1, B_2).
Tout tirage simultané d'une boule dans chaque urne amène oblgatoirement après échange à la situation où chacune des deux urnes contient une boule blache et une boule noire. Donc, $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)=1$.

De même, si $X_n = 2$, il y a deux boules blanches dans l'urne U puis obligatoirement exctament une boule blanche après le $(n+1)$-ème tirage. Donc, $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=1$.

Supposons maintenant que $X_n = 1$. Il y a une boule blanche et une boule noire dans l'urne U et une boule blanche et une boule noire dans l'urne V après le n-ème tirage. Sur les quatre tirages simultanés d'une boule dans chaque urne, tous équiprobables, deux amènent à la situation $X_{n+1} = 1$ et les deux autres non. Donc, $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

b) D'après la formule des probabiltés totales,

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=1) &= P(X_n=0)\times P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)+P(X_n=1)\times P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)+P(X_n=2)\times P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)\\ &= P(X_n=0)+\frac{1}{2}P(X_n=1)+P(X_n=2).\end{aligned}$$

2) $R_1 = R_0M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ceci signifie qu'il est certain que l'urne U contienne une boule blable et une boule noire après le premier tirage.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $R_n = R_0 \times M^n$.

- $R_0 \times M^0 = R_0 \times I_3 = R_0$. L'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $R_n = R_0 \times M^n$. Alors

$$\begin{aligned}R_{n+1} &= R_n \times M\\ &= R_0 \times M^n \times M \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\ &= R_0 \times M^{n+1}.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

3) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

- $P \times D^0 \times P^{-1} = P \times I_3 \times P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = M^0$. L'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$. Alors

$$\begin{aligned}M^{n+1} &= M^n \times M\\ &= P \times D^n \times P^{-1} \times P \times D \times P^{-1} \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\ &= P \times D^n \times I_3 \times D \times P^{-1} = P \times D^n \times D \times P^{-1}\\ &= P \times D^{n+1} \times P^{-1}.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

Remarque. Il y a une erreur d'énoncé : le résultat fourni par l'énoncé est faux quand $n = 0$ car $D^0 = I_3$.

4) a) Soit n un entier naturel non nul.

$$D^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, $D^0P^{-1} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Soit n un entier naturel non nul.

$$R_n = R_0 M^n = R_0 P D^n P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} & -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

5) Ainsi, pour tout entier naturel non nul n,

$$P(X_n = 0) = P(X_n = 2) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} \qquad \text{et} \qquad P(X_n = 1) = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}.$$

Puisque $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 2) = \frac{1}{6}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 1) = \frac{2}{3}$.

Ceci signifie qu'au bout d'un grand nombre de tirages, on a environ deux chances sur trois que l'urne U contienne une boule blanche et une boule noire, une chance sur six que l'urne U contienne deux boules blanches et une chance sur six que l'urne U contienne deux boules noires.

