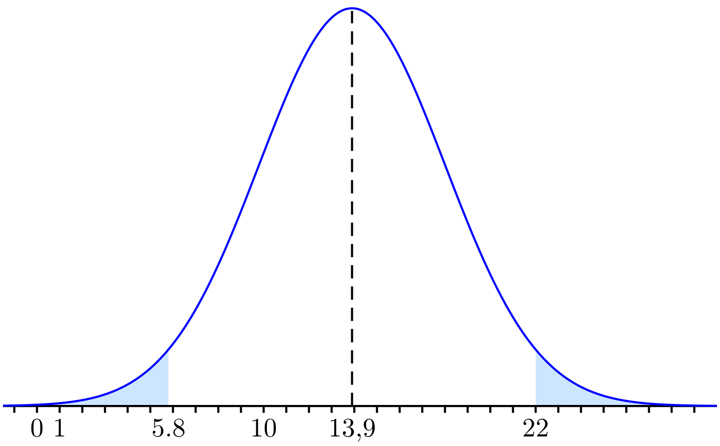
Pondichéry. 2016. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) a) Le symétrique x du réel 22 par rapport au réel $13,9$ vérifie $\dfrac{x+22}{2} = 13,9$ et donc $x = 2 \times 13,9 - 22 = 5,8$.

Graphique.



b) $P(5,8 \leqslant T \leqslant 22) = 1 - P(T \leqslant 5,8) - P(T \geqslant 22) = 1 - 2 \times 0,023 = 0,954$.

Soit $Z = \dfrac{T - 13,9}{\sigma}$. Z suit la loi normale centré réduite.

$P(T \leqslant 5,8) = 0,023$. De plus, $T \leqslant 5,8 \Leftrightarrow T - 13,9 \leqslant -8,1 \Leftrightarrow \dfrac{T-13,9}{\sigma} \leqslant -\dfrac{8,1}{\sigma}$ et donc

$$P\left(Z \leqslant -\frac{8,1}{\sigma}\right) = 0,023.$$

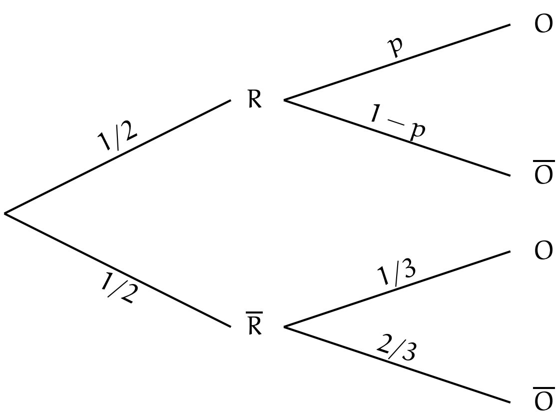
La calculatrice fournit $-\dfrac{8,1}{\sigma} = -1,995\ldots$ et donc $\sigma = 4,1$ au dixième près.

2) La probabilité demandée est $P(T \geqslant 18)$. La calculatrice fournit

$$P(T \geqslant 18) = 0,16 \text{ arrondi au centième.}$$

Partie B

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



D'après la formule des probabilités totales,

$$P(O) = P(R) \times P_R(O) + P\left(\overline{R}\right) \times P_{\overline{R}}(O) = \frac{1}{2} \times p + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}.$$

2) a) Ici, $n = 1500$. D'autre part, la fréquence de « oui » observée est $f = \dfrac{625}{1500} = \dfrac{5}{12}$. On note que $n \geqslant 30$, $nf = 625$ et donc $nf \geqslant 5$ et enfin $n(1-f) = 875$ et donc $n(1-f) \geqslant 5$.

Un intervalle de confiance de la proportion q au niveau de confiance 95% est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{5}{12} - \frac{1}{\sqrt{1500}}, \frac{5}{12} + \frac{1}{\sqrt{1500}}\right] = [0,39; 0,45]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

b) $\dfrac{5}{12} - \dfrac{1}{\sqrt{1500}} \leqslant \dfrac{1}{2}p + \dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{5}{12} + \dfrac{1}{\sqrt{1500}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{\sqrt{1500}} \leqslant \dfrac{1}{2}p \leqslant \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{\sqrt{1500}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\sqrt{1500}} \leqslant p \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\sqrt{1500}}$.

Un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance 95% est

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{1500}}, \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{1500}}\right] = [0,44; 0,56]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

Au niveau de confiance 95%, on peut affirmer que $0,44 \leqslant p \leqslant 0,56$.

EXERCICE 2

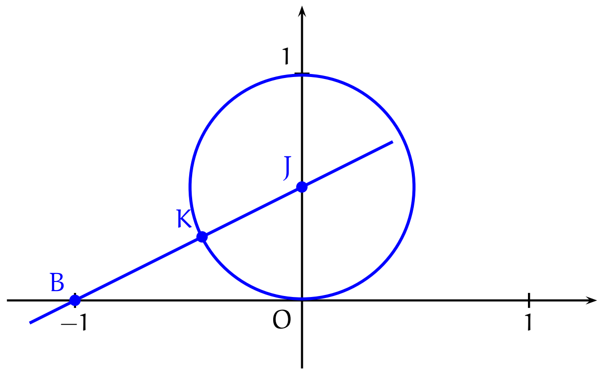
1) Le point J a pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. D'après le théorème de PYTHAGORE,

$$BJ^2 = BO^2 + OJ^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

puis $BJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et donc

$$BK = BJ - KJ = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$$\boxed{BK = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.}$$



2) a) Puisque A_2 est sur le cercle trigonométrique, $|z_{A_2}| = OA_2 = 1$. D'autre part,

$$\arg(z_{A_2}) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA_2}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA_1}\right) + \left(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}\right) = \frac{4\pi}{5}\ [2\pi].$$

Donc,

$$\boxed{z_{A_2} = e^{\frac{4i\pi}{5}}.}$$

b) Le point A_2 a pour coordonnées $\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)$, le point B a pour coordonnées $(-1, 0)$. Donc,

$$BA_2^2 = (x_{A_2} - x_B)^2 + (y_{A_2} - y_B)^2 = \left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)^2$$
$$= \cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1 + \sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right).$$

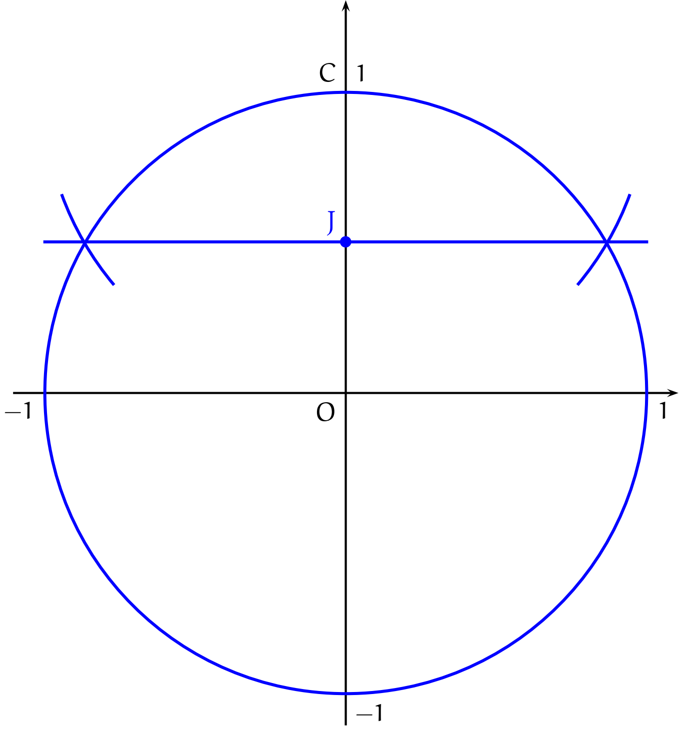
$$\boxed{BA_2^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right).}$$

c) Donc, $BA_2^2 = 2 + 2\frac{-\sqrt{5}-1}{4} = 2 + \frac{-\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ puis

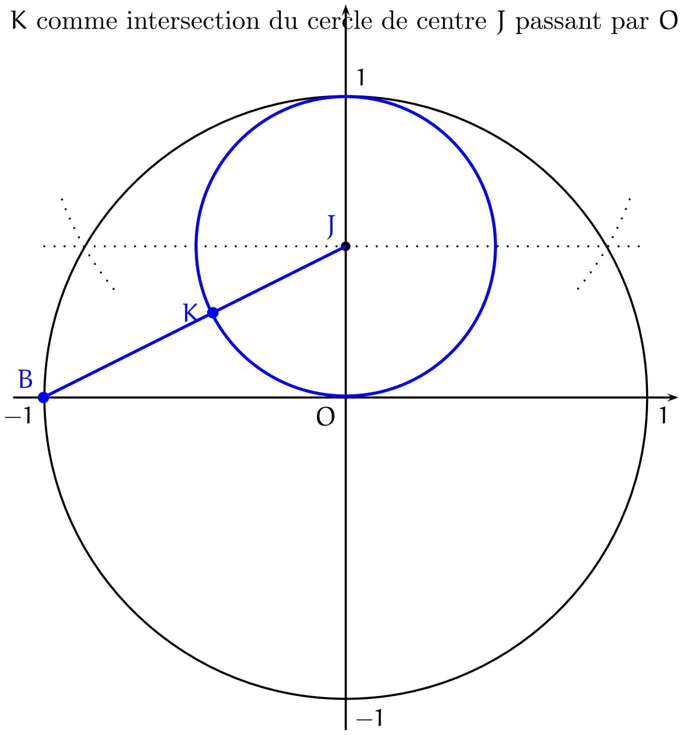
$$BA_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = BK.$$

$$\boxed{BA_2 = BK.}$$

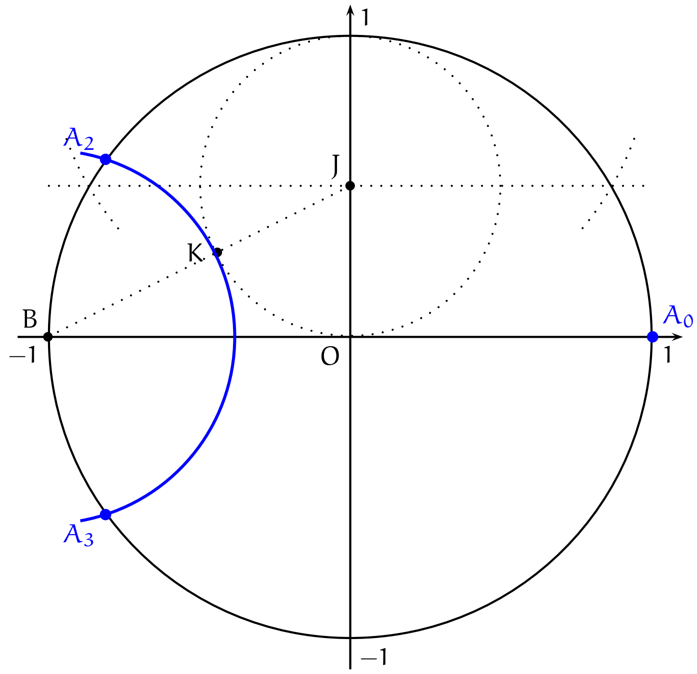
3) On commence par construire le cercle de centre O et de rayon 1 puis le point J milieu du segment [OC] où C est le point de coordonnées $(0, 1)$ en construisant à la règle non graduée et au compas la médiatrice du segment [OC].



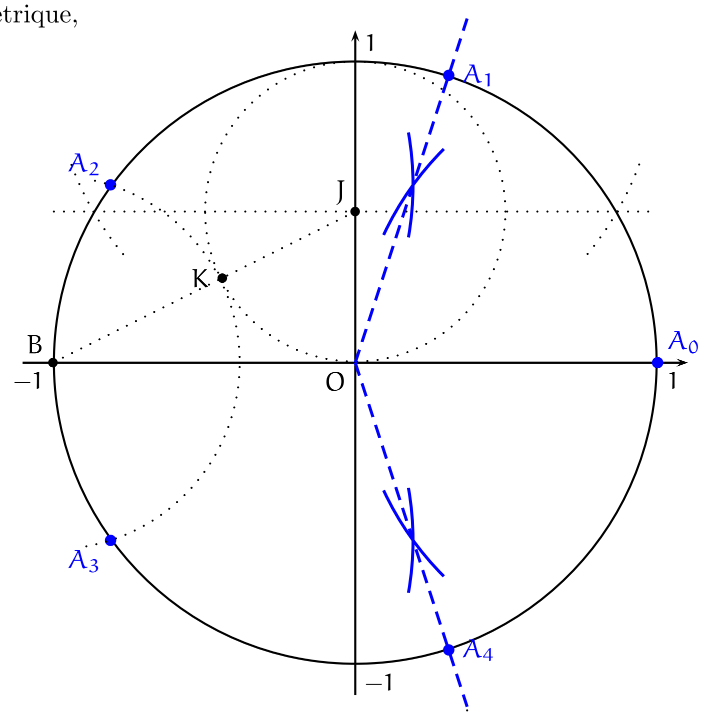
On construit ensuite le point K comme intersection du cercle de centre J passant par O et du segment $[BJ]$.



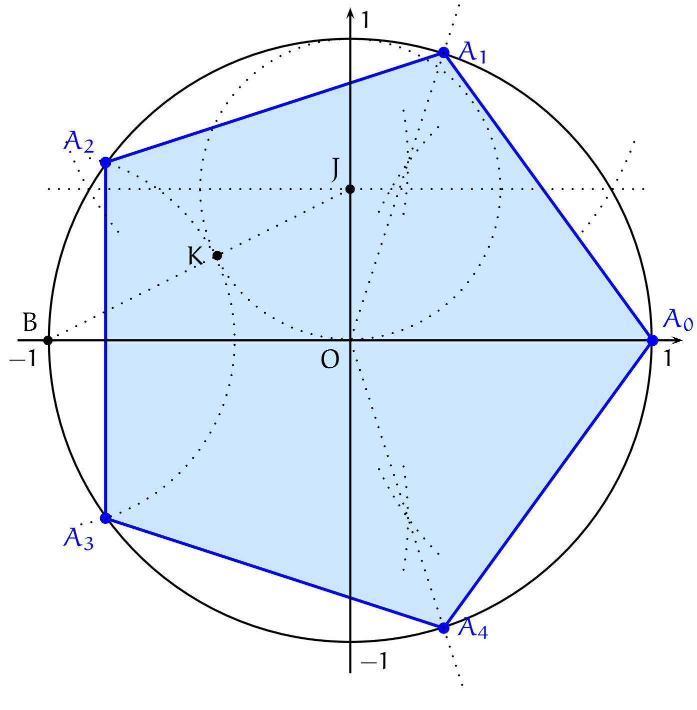
Les points A_2 et A_3 sont les points d'intersection du cercle trigonométrique et du cercle de centre B et de rayon BK.



Les points A_1 et A_4 sont les points d'intersection des bissectrices intérieures des angles $\widehat{A_0OA_2}$ et $\widehat{A_0OA_3}$ respectivement et du cercle trigonométrique,



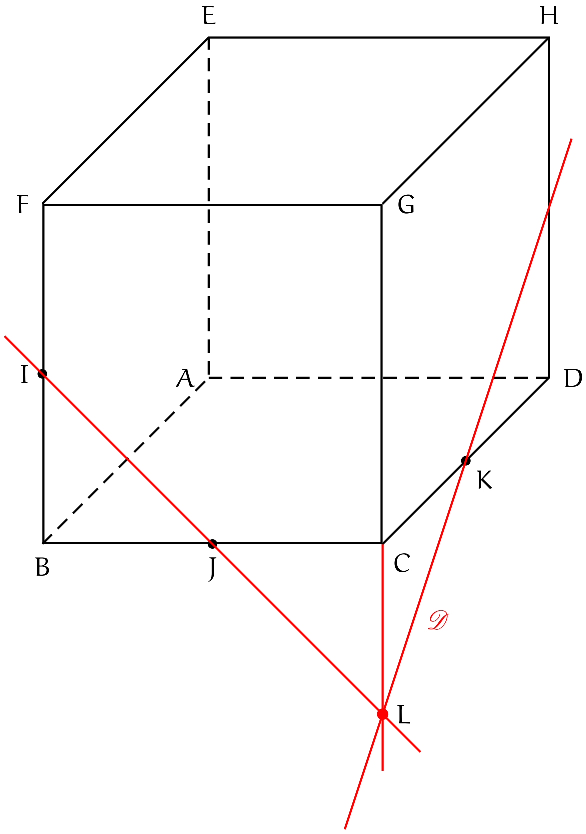
et on obtient



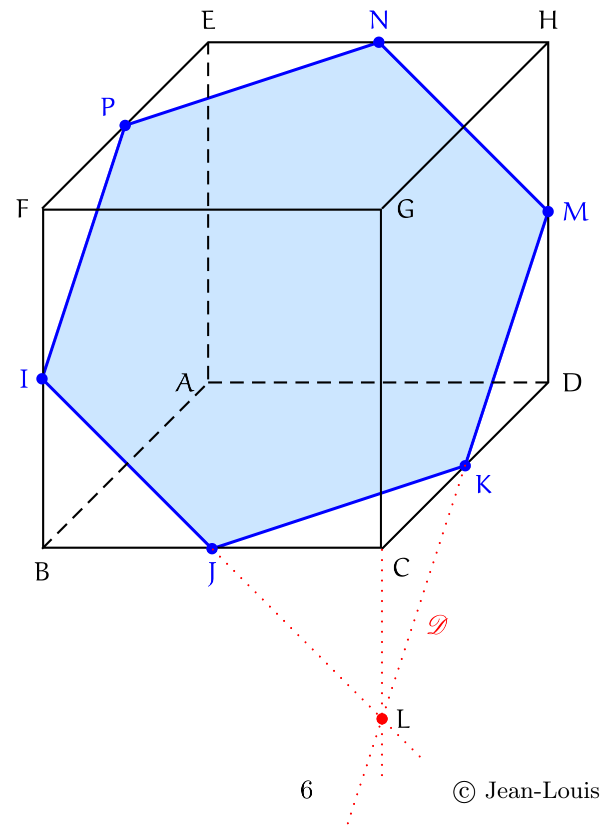
EXERCICE 3

Partie A

Les plans (IJK) et (CDH) sont sécants en une droite $\mathscr{D}$. K et L sont deux points distincts appartenant aux plans (IJK) et (CDH). Donc, $\mathscr{D} = (KL)$.



La droite $\mathscr{D}$ coupe la droite (HD) en un point M. Puisque les plans (BCG) et (ADE) sont parallèles, l'intersection des plans (IJK) et (ADE) est la parallèle à la droite (IJ) passant par M. Cette droite coupe la droite (EH) en un point N et l'intersection du plan (IJK) et du plan (ADE) est la droite (MN). On trace enfin la parallèle à la droite (JK) passant par N. Cette droite coupe la droite (EF) en un point P et on peut achever le tracé de la section du cube par le plan (IJK).



Partie B

1) Le point A a pour coordonnées $(0,0,0)$ et, puisque $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$, le point G a pour coordonnées $(1,1,1)$.
Les points B et F ont pour coordonnées respectives $(1,0,0)$ et $(1,0,1)$ et donc le point I a pour coordonnées $\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$.

Les points B et C ont pour coordonnées respectives $(1,0,0)$ et $(1,1,0)$ et donc le point J a pour coordonnées $\left(1,\frac{1}{2},0\right)$.

Les points C et D ont pour coordonnées respectives $(1,1,0)$ et $(0,1,0)$ et donc le point K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2},1,0\right)$.

2) a) Les coordonnées respectives des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont $\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right)$.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (en analysant leur première coordonnée) et donc les points I, J et K définissent effectivement un plan de manière unique.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG}$ sont $(1,1,1)$.

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{IJ}=1\times 0+1\times\frac{1}{2}+1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

et

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{IK}=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\times 1+1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}=0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK). Donc, le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

b) Le plan (IJK) est le plan passant par I $\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AG}(1,1,1)$. Une équation cartésienne de ce plan est

$$1\times(x-1)+1\times(y-0)+1\times\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$$

ou encore

$$\boxed{\text{le plan (IJK) a pour équation } x+y+z=\frac{3}{2}.}$$

3) a) Soient $t\in[0,1]$ puis M le point tel que $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AG}$. Le point M a pour coodonnées (t,t,t) puis

$$MI^2=(1-t)^2+(0-t)^2+\left(\frac{1}{2}-t\right)^2=1-2t+t^2+t^2+\frac{1}{4}-t+t^2=3t^2-3t+\frac{5}{4}.$$

b) Pour $t\in[0,1]$, posons $f(t)=IM^2=3t^2-3t+\frac{5}{4}$. Pour $t\in[0,1]$, $f'(t)=6t-3$. Donc, f est décroissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$. Par suite, $f(t)$ est minimal pour $t=\frac{1}{2}$.

Quand $t=\frac{1}{2}$, le point M est le point N de coordonnées $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Puisque IM est minimale si et seulement si IM^2 est minimale, la distance IM est minimale pour le point N $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

4) a) $x_N+y_N+z_N=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. Donc le point N appartient au plan (IJK).

b) Les coordonnées respectives de vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{IN}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont $(1,1,1)$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ et $(0,0,1)$

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{IN}=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\times\frac{1}{2}+1\times 0=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$$

et

$$\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{IN}=0\times\left(-\frac{1}{2}\right)+0\times\frac{1}{2}+1\times 0=0.$$

Donc, la droite (IN) est orthogonale aux droites (AG) et (BF). De plus, les droites (AG) et (IN) sont sécantes en N et les droites (BF) et (IN) sont sécantes en I. Donc, la droite (IN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).

EXERCICE 4.

Soit $x \in]0, 14]$ l'abscisse du point M. L'aire, exprimée en unités d'aire, du rectangle $OPMQ$ est égale à

$$\mathscr{A}(x) = OP \times OQ = x_P y_Q = x_M y_M = 2x - x\ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

• $\mathscr{A}(1) = 2 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \ln 2 = 2,693\ldots$ et $\mathscr{A}(2) = 4 - \ln(1) = 4$. Puisque $\mathscr{A}(1) \neq \mathscr{A}(2)$, la fonction $\mathscr{A}$ n'est pas constante sur $]0, 14]$ ou encore l'aire du rectangle $OPMQ$ n'est pas constante quand le point M varie.

• La fonction $\mathscr{A}$ est dérivable sur $]0, 14]$ et pour $x \in]0, 14]$,

$$\mathscr{A}'(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) - x \times \frac{1/2}{x/2} = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\mathscr{A}'(x) \geqslant 0 &\Leftrightarrow 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow -\ln\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant -1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant 1\\ &\Leftrightarrow \frac{x}{2} \leqslant e^1 \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R})\\ &\Leftrightarrow x \leqslant 2e\end{aligned}$$

avec $2e = 5,4\ldots$ et donc $2e \in]0, 14]$. Par suite, la fonction $\mathscr{A}$ est croissante sur $]0, 2e]$ et décroissante sur $[2e, 14]$. La fonction $\mathscr{A}$ admet un maximum en $2e$ et ce maximum est égal à

$$\mathscr{A}(2e) = 4e - 2e\ln\left(\frac{2e}{2}\right) = 4e - 2e \times 1 = 2e.$$

Dans ce cas, l'abscise de M est $2e$ et l'ordonnée de M est $f(2e) = 2 - \ln\left(\frac{2e}{2}\right) = 1$. Les coordonnées de M tel que l'aire du rectangle $OPMQ$ soit maximale, sont $(2e, 1)$.

EXERCICE 5.

Partie A : modélisation discrète

1) La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$T_0 = 25 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} = 0,85T_n + 15.$$

La température, exprimée en degrés Celsius, de la boîte de conserve au bout de 3 minutes est T_3.

- $T_1 = 0,85T_0 + 15 = 0,85 \times 25 + 15 = 36,25°$
- $T_2 = 0,85T_1 + 15 = 0,85 \times 36,25 + 15 = 45,8125°$
- $T_3 = 0,85T_2 + 15 = 0,85 \times 45,8125 + 15 = 53,940625°$

$$\boxed{\text{La température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes est de } 54° \text{ arrondie à l'unité.}}$$

2) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 100 - 75 \times (0,85)^n$.

- $100 - 75 \times (0,85)^0 = 100 - 75 = 25 = T_0$. Donc, l'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $T_n = 100 - 75 \times (0,85)^n$.

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= 0,85T_n + 15 \\
&= 0,85\left(100 - 75 \times (0,85)^n\right) + 15 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= 85 - 75 \times (0,85)^{n+1} + 15 \\
&= 100 - 75 \times (0,85)^{n+1}.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ T_n = 100 - 75 \times (0,85)^n.}$$

3) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
T_n \geqslant 85 &\Leftrightarrow 100 - 75 \times (0,85)^n \geqslant 85 \Leftrightarrow -75 \times (0,85)^n \geqslant -15 \\
&\Leftrightarrow 75 \times (0,85)^n \leqslant 15 \Leftrightarrow (0,85)^n \leqslant \frac{15}{75} \Leftrightarrow (0,85)^n \leqslant 0,2 \\
&\Leftrightarrow \ln\left((0,85)^n\right) \leqslant \ln(0,2) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln(0,85) \leqslant \ln(0,2) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,85)} \text{ (car } \ln(0,85) < 0) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 9,9\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 10 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La stérilisation débute au bout de 10 minutes.}}$$

Partie B

1) a) La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour $t \geqslant 0$,

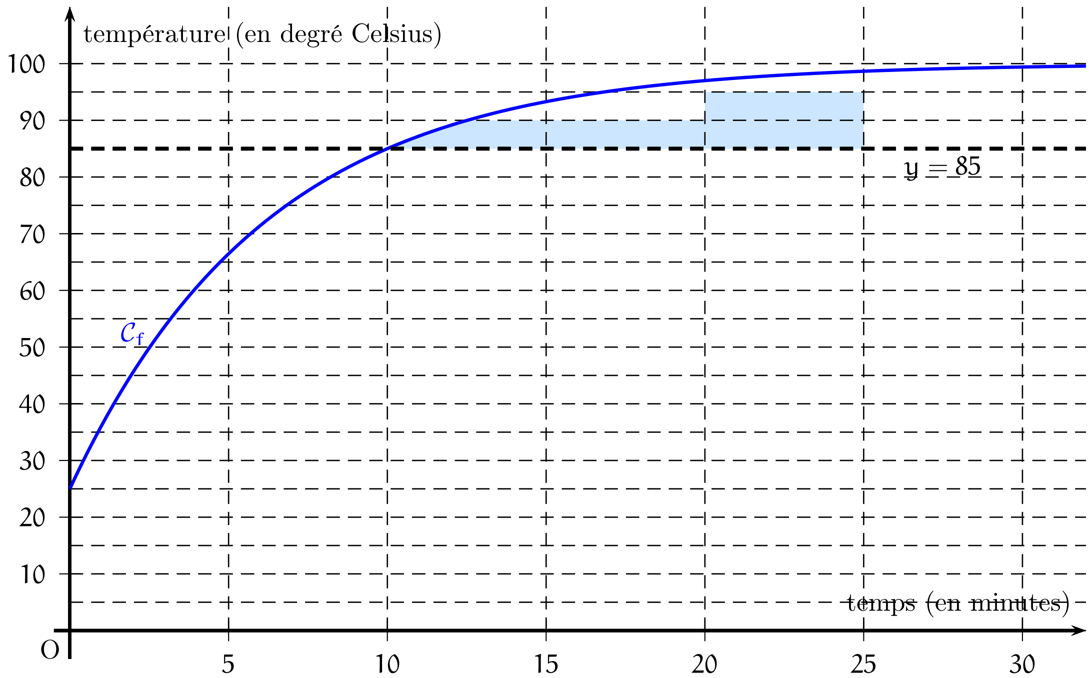
$$f'(t) = 0 - 75\left(-\frac{\ln 5}{10}\right)e^{-\frac{\ln 5}{10}t} = 7,5\ \ln(5)\ e^{-\frac{\ln 5}{10}t}.$$

Puisque $5 > 1$, $\ln 5 > 0$. Puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction f' est strictement positive sur $[0,+\infty[$. On en déduit que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[.}$$

b) $f(10) = 100 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10}\times 10} = 100 - 75e^{-\ln 5} = 100 - 75\dfrac{1}{e^{\ln 5}} = 100 - \dfrac{75}{5} = 100 - 15 = 85.$
Puisque la fonction f est croissante sur $[0,+\infty[$, si $t \geqslant 10$, alors $f(t) \geqslant f(10)$ ou encore $f(t) \geqslant 85$.

2) a) L'aire, exprimée en unités d'aire, d'un rectangle en pointillé est égale à 5×5 ou encore 25. 3 rectangles ont déjà une aire égale à 75 unités d'aire. L'aire du domaine en bleu est donc clairement strictement supérieure à 80 et il en est de même de $\mathscr{A}(25)$.



b) Soit $\theta \geqslant 10$. Pour $t \in [10, \theta]$, $f(t) \geqslant 85$. Donc,

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(\theta) &= \int_{10}^{\theta} (f(t) - 85)\ dt = \int_{10}^{\theta} \left(15 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right)\ dt \\
&= 15\int_{10}^{\theta} 1\ dt - 75\int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\ dt \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\
&= 15(\theta - 10) - 75\int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\ dt.
\end{aligned}$$

c) Par suite,

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(20) &= 15(20-10) - 75\int_{10}^{20} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\ dt = 150 - 75\left[\frac{e^{-\frac{\ln 5}{10}t}}{-(\ln 5)/10}\right]_{10}^{20} = 150 - 75\frac{e^{-2\ln 5} - e^{-\ln 5}}{-(\ln 5)/10} \\
&= 150 + \frac{750}{\ln 5}\left(\left(\frac{1}{e^{\ln 5}}\right)^2 - \frac{1}{e^{\ln 5}}\right) = 150 + \frac{750}{\ln 5}\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{5}\right) = 150 + \frac{750}{\ln 5}\left(-\frac{4}{25}\right) \\
&= 150 - \frac{120}{\ln 5} = 75,4\ldots
\end{aligned}$$

$\mathscr{A}(20) < 80$ et donc la stérilisation n'est pas terminée au bout de 20 minutes.

