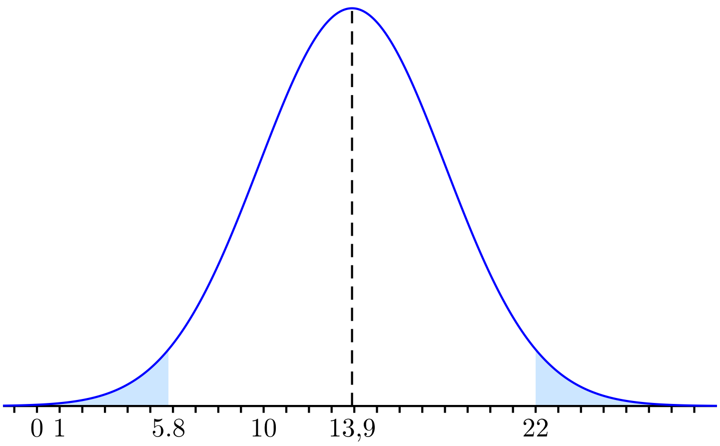
Pondichéry. 2016. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) a) Le symétrique x du réel 22 par rapport au réel $13,9$ vérifie $\dfrac{x+22}{2} = 13,9$ et donc $x = 2 \times 13,9 - 22 = 5,8$.

Graphique.



b) $P(5,8 \leqslant T \leqslant 22) = 1 - P(T \leqslant 5,8) - P(T \geqslant 22) = 1 - 2 \times 0,023 = 0,954$.

Soit $Z = \dfrac{T - 13,9}{\sigma}$. Z suit la loi normale centré réduite.

$P(T \leqslant 5,8) = 0,023$. De plus, $T \leqslant 5,8 \Leftrightarrow T - 13,9 \leqslant -8,1 \Leftrightarrow \dfrac{T-13,9}{\sigma} \leqslant -\dfrac{8,1}{\sigma}$ et donc

$$P\left(Z \leqslant -\frac{8,1}{\sigma}\right) = 0,023.$$

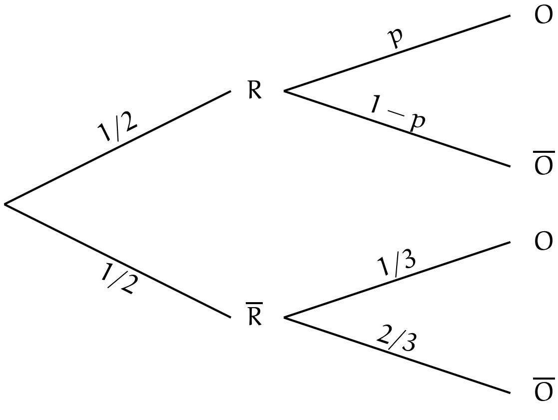
La calculatrice fournit $-\dfrac{8,1}{\sigma} = -1,995\ldots$ et donc $\sigma = 4,1$ au dixième près.

2) La probabilité demandée est $P(T \geqslant 18)$. La calculatrice fournit

$$P(T \geqslant 18) = 0,16 \text{ arrondi au centième.}$$

Partie B

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



D'après la formule des probabilités totales,

$$P(O) = P(R) \times P_R(O) + P\left(\overline{R}\right) \times P_{\overline{R}}(O) = \frac{1}{2} \times p + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}.$$

2) a) Ici, $n = 1500$. D'autre part, la fréquence de « oui » observée est $f = \dfrac{625}{1500} = \dfrac{5}{12}$. On note que $n \geqslant 30$, $nf = 625$ et donc $nf \geqslant 5$ et enfin $n(1-f) = 875$ et donc $n(1-f) \geqslant 5$.

Un intervalle de confiance de la proportion q au niveau de confiance 95% est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{5}{12} - \frac{1}{\sqrt{1500}}, \frac{5}{12} + \frac{1}{\sqrt{1500}}\right] = [0,39; 0,45]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

b) $\dfrac{5}{12} - \dfrac{1}{\sqrt{1500}} \leqslant \dfrac{1}{2}p + \dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{5}{12} + \dfrac{1}{\sqrt{1500}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{\sqrt{1500}} \leqslant \dfrac{1}{2}p \leqslant \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{\sqrt{1500}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\sqrt{1500}} \leqslant p \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\sqrt{1500}}$.

Un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance 95% est

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{1500}}, \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{1500}}\right] = [0,44; 0,56]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

Au niveau de confiance 95%, on peut affirmer que $0,44 \leqslant p \leqslant 0,56$.

EXERCICE 2

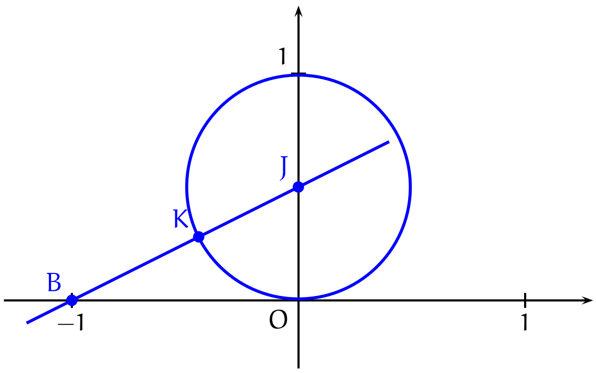
1) Le point J a pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. D'après le théorème de PYTHAGORE,

$$BJ^2 = BO^2 + OJ^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

puis $BJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et donc

$$BK = BJ - KJ = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$$\boxed{BK = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.}$$



2) a) Puisque A_2 est sur le cercle trigonométrique, $|z_{A_2}| = OA_2 = 1$. D'autre part,

$$\arg(z_{A_2}) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA_2}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA_1}\right) + \left(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}\right) = \frac{4\pi}{5}\ [2\pi].$$

Donc,

$$\boxed{z_{A_2} = e^{\frac{4i\pi}{5}}.}$$

b) Le point A_2 a pour coordonnées $\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)$, le point B a pour coordonnées $(-1, 0)$. Donc,

$$\begin{aligned} BA_2^2 &= (x_{A_2} - x_B)^2 + (y_{A_2} - y_B)^2 = \left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)^2 \\ &= \cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1 + \sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right). \end{aligned}$$

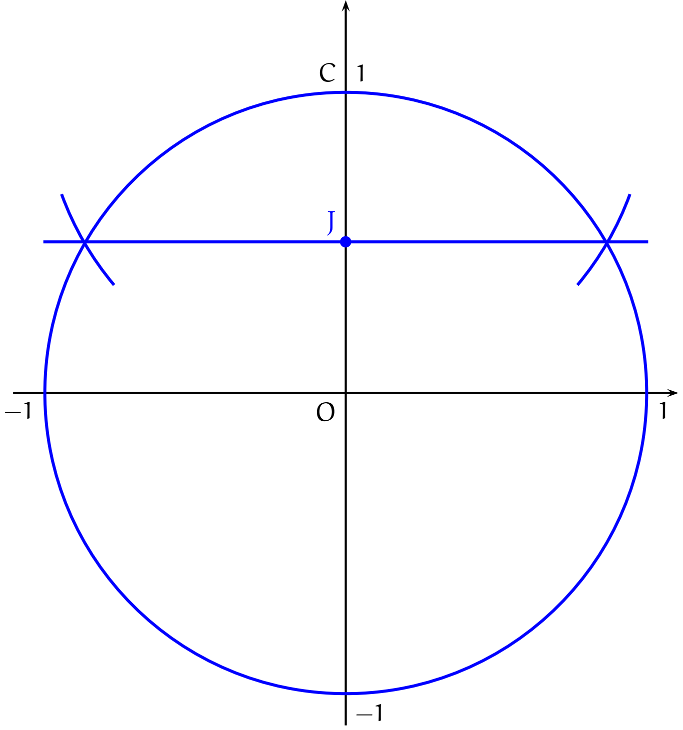
$$\boxed{BA_2^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right).}$$

c) Donc, $BA_2^2 = 2 + 2\frac{-\sqrt{5}-1}{4} = 2 + \frac{-\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ puis

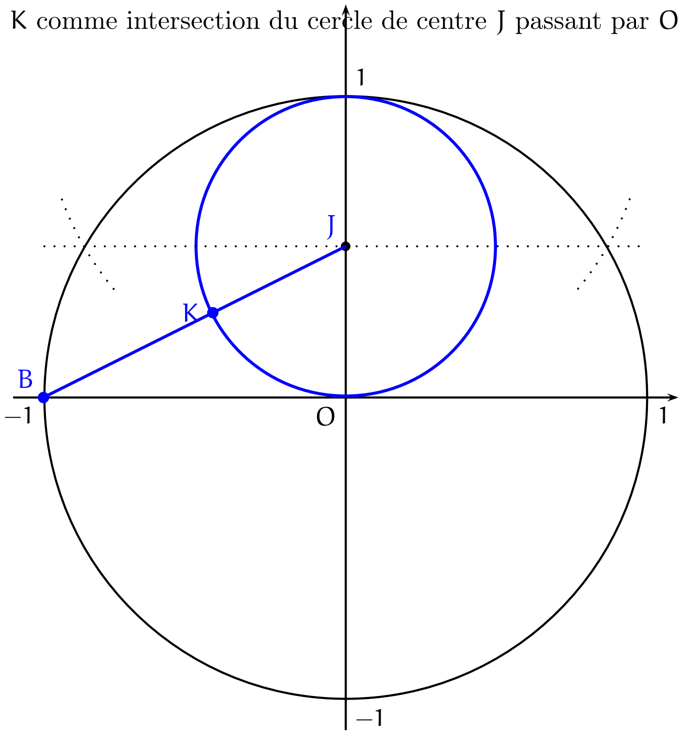
$$BA_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = BK.$$

$$\boxed{BA_2 = BK.}$$

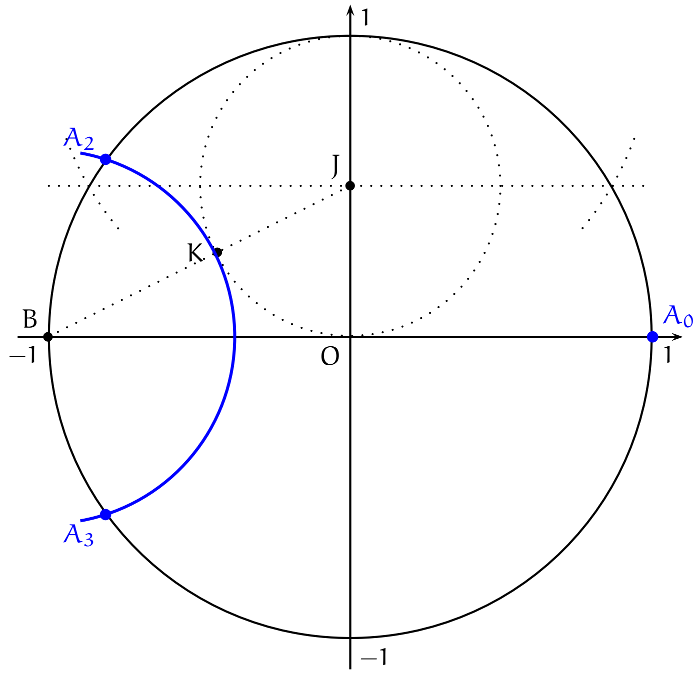
3) On commence par construire le cercle de centre O et de rayon 1 puis le point J milieu du segment [OC] où C est le point de coordonnées $(0, 1)$ en construisant à la règle non graduée et au compas la médiatrice du segment [OC].



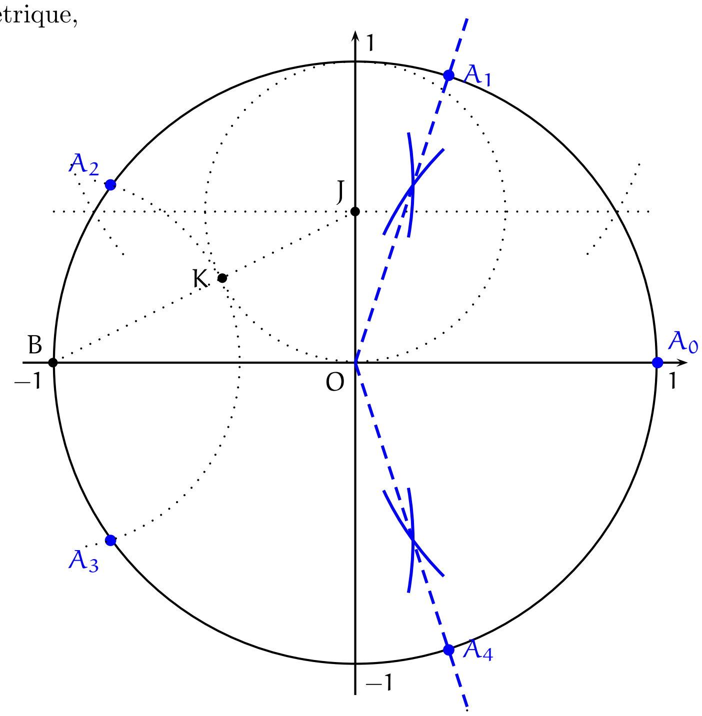
On construit ensuite le point K comme intersection du cercle de centre J passant par O et du segment $[\mathsf{BJ}]$.



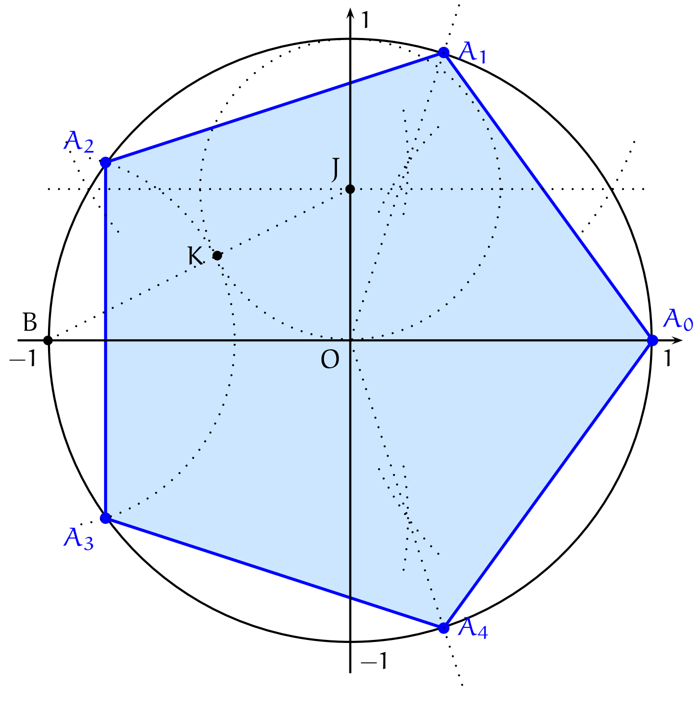
Les points A_2 et A_3 sont les points d'intersection du cercle trigonométrique et du cercle de centre B et de rayon BK.



Les points A_1 et A_4 sont les points d'intersection des bissectrices intérieures des angles $\widehat{A_0OA_2}$ et $\widehat{A_0OA_3}$ respectivement et du cercle trigonométrique,



et on obtient



EXERCICE 3

Partie A

1)

$$\begin{aligned}MN &= \frac{1}{3a-5b}\begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{3a-5b}\begin{pmatrix} 3a-5b & 0 \\ 0 & 3a-5b \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}NM &= \frac{1}{3a-5b}\begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3a-5b}\begin{pmatrix} 3a-5b & 0 \\ 0 & 3a-5b \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2\end{aligned}$$

On en déduit que la matrice M est inversible et que $M^{-1} = N$.

2) a) $3 \times 6 - 5 \times 3 = 18 - 15 = 3$. Donc, le couple $(a_0, b_0) = (6, 3)$ est un couple d'entiers relatifs solution de (E).

b) Soit (a, b) un couple d'entiers relatifs.

$$\begin{aligned}\det(M) = 3 &\Leftrightarrow 3a - 5b = 3 \Leftrightarrow 3a - 5b = 3a_0 - 5b_0 \Leftrightarrow 3\left(a - a_0\right) = 5\left(b - b_0\right)\\ &\Leftrightarrow 3(a-6) = 5(b-3).\end{aligned}$$

c) Soit (a, b) un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E). D'après la question b), l'entier 5 divise l'entier $3(a-6)$. De plus, les entiers 3 et 5 sont premiers entre eux (car 3 et 5 sont des nombres premiers distincts). D'après le théorème de Gauss, l'entier 5 divise l'entier $a - 6$. Donc, il existe un entier relatif k tel que $a - 6 = 5k$ ou encore tel que $a = 6 + 5k$. De même, il existe un entier relatif k' tel que $b - 3 = 3k'$ ou encore tel que $b = 3 + 3k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $a = 6 + 5k$ et $b = 3 + 3k'$.

$$(a, b) \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow 3(a-6) = 5(b-3) \Leftrightarrow 3 \times 5k = 5 \times 3k' \Leftrightarrow k = k'.$$

Les solutions de l'équation (E) sont les couples de la forme $(6 + 5k, 3 + 3k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Partie B

1) $\det(Q) = 6 \times 3 - 5 \times 3 = 3$. En particulier, $\det(Q) \neq 0$ et donc la matrice Q est inversible d'après la partie A. De plus,

$$Q^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

2) La lettre D correspond à $x_1 = 3$ et la lettre O correspond à $x_2 = 14$. Donc, le mot DO correspond au vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix}$.

$$Y = QX = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \times 3 + 3 \times 14 \\ 5 \times 3 + 3 \times 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 57 \end{pmatrix}.$$

Donc, $y_1 = 60$ et $y_2 = 57$.

Puisque $60 = 2 \times 26 + 8$ avec $0 \leqslant 8 \leqslant 25$ et $57 = 2 \times 26 + 5$ avec $0 \leqslant 5 \leqslant 25$, on a $r_1 = 8$ et $r_2 = 5$.

8 correspond à la lettre I et 5 correspond à la lettre F. Donc,

$$\boxed{\text{le mot DO est codé par le mot IF.}}$$

3) a) $Y = QX \Rightarrow Q^{-1}Y = Q^{-1}QX \Rightarrow Q^{-1}Y = X \Rightarrow 3X = 3Q^{-1}Y$. On en déduit que

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_1 = 3y_1 - 3y_2 \\ 3x_2 = -5y_1 + 6y_2 \end{array}\right.,$$

puis que

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_1 \equiv 3r_1 - 3r_2 \quad [26] \\ 3x_2 \equiv -5r_1 + 6r_2 \quad [26] \end{array}\right. .$$

b) $9 \times 3 = 27 = 26 + 1$ et donc $9 \times 3 \equiv 1 \quad [26]$. Par suite,

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_1 \equiv 3r_1 - 3r_2 \quad [26] \\ 3x_2 \equiv -5r_1 + 6r_2 \quad [26] \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 9 \times 3x_1 \equiv 9 \times 3r_1 - 9 \times 3r_2 \quad [26] \\ 9 \times 3x_2 \equiv -9 \times 5r_1 + 9 \times 6r_2 \quad [26] \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 \equiv r_1 - r_2 \quad [26] \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 \quad [26] \end{array}\right. ,$$

car $-9 \times 5 = -45 = -2 \times 26 + 7$ et $9 \times 6 = 54 = 2 \times 26 + 2$.

c) La lettre S correspond à $r_1 = 18$ et la lettre G correspond à $r_2 = 6$. Ensuite, $x_1 \equiv 12 \quad [26]$ avec $0 \leqslant 12 \leqslant 25$ et donc $x_1 = 12$. De même, $x_2 \equiv 7 \times 18 + 2 \times 6 \quad [26]$ et donc $x_2 = 138 \quad [26]$ ou enfin $x_2 = 8$.

12 correspond à la lettre M et 8 correspond à la lettre I. Donc,

$$\boxed{\text{le mot SG est décodé en le mot MI.}}$$

EXERCICE 4.

Soit $x \in]0, 14]$ l'abscisse du point M. L'aire, exprimée en unités d'aire, du rectangle $OPMQ$ est égale à

$$\mathscr{A}(x) = OP \times OQ = x_P y_Q = x_M y_M = 2x - x\ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

• $\mathscr{A}(1) = 2 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \ln 2 = 2,693\ldots$ et $\mathscr{A}(2) = 4 - \ln(1) = 4$. Puisque $\mathscr{A}(1) \neq \mathscr{A}(2)$, la fonction $\mathscr{A}$ n'est pas constante sur $]0, 14]$ ou encore l'aire du rectangle $OPMQ$ n'est pas constante quand le point M varie.

• La fonction $\mathscr{A}$ est dérivable sur $]0, 14]$ et pour $x \in]0, 14]$,

$$\mathscr{A}'(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) - x \times \frac{1/2}{x/2} = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\mathscr{A}'(x) \geqslant 0 &\Leftrightarrow 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow -\ln\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant -1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{2} \leqslant e^1 \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow x \leqslant 2e\end{aligned}$$

avec $2e = 5,4\ldots$ et donc $2e \in]0, 14]$. Par suite, la fonction $\mathscr{A}$ est croissante sur $]0, 2e]$ et décroissante sur $[2e, 14]$. La fonction $\mathscr{A}$ admet un maximum en $2e$ et ce maximum est égal à

$$\mathscr{A}(2e) = 4e - 2e\ln\left(\frac{2e}{2}\right) = 4e - 2e \times 1 = 2e.$$

Dans ce cas, l'abscise de M est $2e$ et l'ordonnée de M est $f(2e) = 2 - \ln\left(\frac{2e}{2}\right) = 1$. Les coordonnées de M tel que l'aire du rectangle $OPMQ$ soit maximale, sont $(2e, 1)$.

EXERCICE 5.

Partie A : modélisation discrète

1) La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$T_0 = 25 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} = 0,85T_n + 15.$$

La température, exprimée en degrés Celsius, de la boîte de conserve au bout de 3 minutes est T_3.

- $T_1 = 0,85T_0 + 15 = 0,85 \times 25 + 15 = 36,25°$
- $T_2 = 0,85T_1 + 15 = 0,85 \times 36,25 + 15 = 45,8125°$
- $T_3 = 0,85T_2 + 15 = 0,85 \times 45,8125 + 15 = 53,940625°$

La température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes est de 54° arrondie à l'unité.

2) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 100 - 75 \times (0,85)^n$.

- $100 - 75 \times (0,85)^0 = 100 - 75 = 25 = T_0$. Donc, l'égalité est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $T_n = 100 - 75 \times (0,85)^n$.

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= 0,85T_n + 15 \\ &= 0,85\left(100 - 75 \times (0,85)^n\right) + 15 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= 85 - 75 \times (0,85)^{n+1} + 15 \\ &= 100 - 75 \times (0,85)^{n+1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = 100 - 75 \times (0,85)^n$.

3) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} T_n \geqslant 85 &\Leftrightarrow 100 - 75 \times (0,85)^n \geqslant 85 \Leftrightarrow -75 \times (0,85)^n \geqslant -15 \\ &\Leftrightarrow 75 \times (0,85)^n \leqslant 15 \Leftrightarrow (0,85)^n \leqslant \frac{15}{75} \Leftrightarrow (0,85)^n \leqslant 0,2 \\ &\Leftrightarrow \ln\left((0,85)^n\right) \leqslant \ln(0,2) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\ &\Leftrightarrow n\ln(0,85) \leqslant \ln(0,2) \\ &\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,85)} \text{ (car } \ln(0,85) < 0) \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 9,9\ldots \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 10 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

La stérilisation débute au bout de 10 minutes.

Partie B

1) a) La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour $t \geqslant 0$,

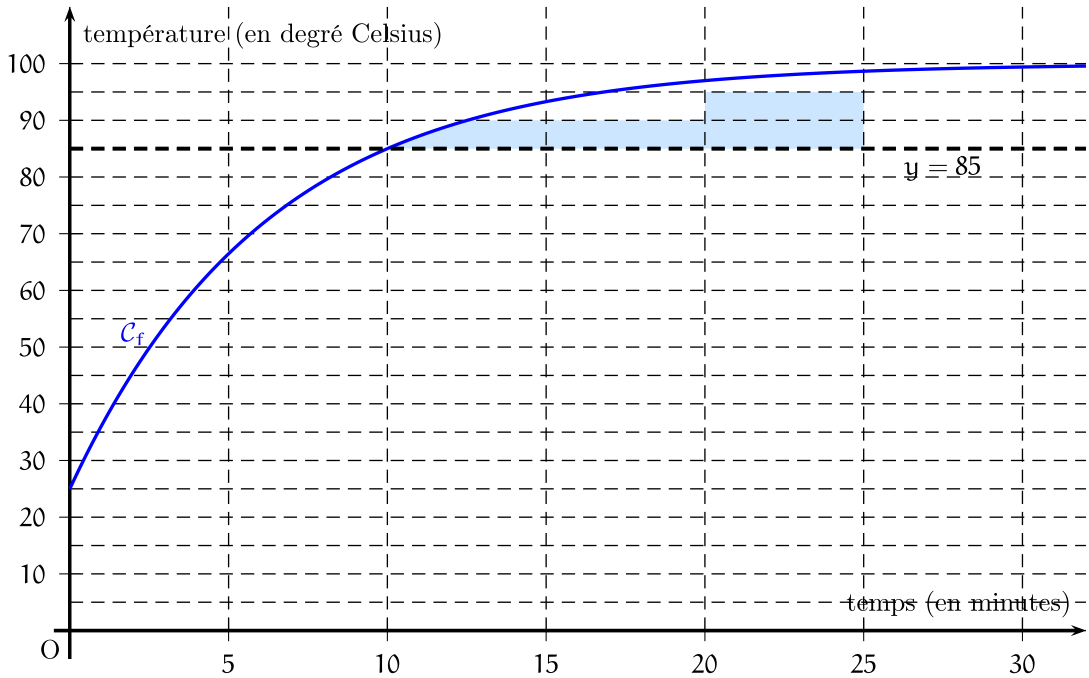
$$f'(t) = 0 - 75\left(-\frac{\ln 5}{10}\right)e^{-\frac{\ln 5}{10}t} = 7,5\ \ln(5)\ e^{-\frac{\ln 5}{10}t}.$$

Puisque $5 > 1$, $\ln 5 > 0$. Puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction f' est strictement positive sur $[0,+\infty[$. On en déduit que

La fonction f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

b) $f(10) = 100 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10}\times 10} = 100 - 75e^{-\ln 5} = 100 - 75\frac{1}{e^{\ln 5}} = 100 - \frac{75}{5} = 100 - 15 = 85.$
Puisque la fonction f est croissante sur $[0,+\infty[$, si $t \geqslant 10$, alors $f(t) \geqslant f(10)$ ou encore $f(t) \geqslant 85$.

2) a) L'aire, exprimée en unités d'aire, d'un rectangle en pointillé est égale à 5×5 ou encore 25. 3 rectangles ont déjà une aire égale à 75 unités d'aire. L'aire du domaine en bleu est donc clairement strictement supérieure à 80 et il en est de même de $\mathscr{A}(25)$.



b) Soit $\theta \geqslant 10$. Pour $t \in [10, \theta]$, $f(t) \geqslant 85$. Donc,

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\theta) &= \int_{10}^{\theta} (f(t) - 85)\ dt = \int_{10}^{\theta} \left(15 - 75e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right)\ dt \\ &= 15\int_{10}^{\theta} 1\ dt - 75\int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\ dt \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= 15(\theta - 10) - 75\int_{10}^{\theta} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\ dt.\end{aligned}$$

c) Par suite,

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(20) &= 15(20-10) - 75\int_{10}^{20} e^{-\frac{\ln 5}{10}t}\ dt = 150 - 75\left[\frac{e^{-\frac{\ln 5}{10}t}}{-(\ln 5)/10}\right]_{10}^{20} = 150 - 75\frac{e^{-2\ln 5} - e^{-\ln 5}}{-(\ln 5)/10} \\ &= 150 + \frac{750}{\ln 5}\left(\left(\frac{1}{e^{\ln 5}}\right)^2 - \frac{1}{e^{\ln 5}}\right) = 150 + \frac{750}{\ln 5}\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{5}\right) = 150 + \frac{750}{\ln 5}\left(-\frac{4}{25}\right) \\ &= 150 - \frac{120}{\ln 5} = 75,4\ldots\end{aligned}$$

$\mathscr{A}(20) < 80$ et donc la stérilisation n'est pas terminée au bout de 20 minutes.

