

# Polynésie. 2016. Enseignement spécifique. Corrigé

## EXERCICE 1

### Partie A

1) Pour tout réel positif  $t$ ,  $C'(t)$  est le coefficient directeur de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $t$ . Sur la courbe  $\mathcal{C}_1$  ou sur la courbe  $\mathcal{C}_2$ , le coefficient directeur le plus grand est celui de la tangente en le point de coordonnées  $(0, 0)$ . Donc, la vitesse d'apparition dans le sang est maximale à l'instant  $t = 0$  c'est-à-dire au moment où l'individu ingère l'alcool.

2) Le coefficient directeur de la tangente à  $\mathcal{C}_1$  en le point de coordonnées  $(0, 0)$  est plus grand que le coefficient directeur de la tangente à  $\mathcal{C}_2$  en ce même point. Donc, la personne  $P_1$  subit plus vite les effets de l'alcool que la personne  $P_2$ . La personne la plus corpulente est donc la personne  $P_2$ .

3) a) La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  en tant que produit de fonctions dérivables sur  $[0, +\infty[$  et pour tout réel  $t \geq 0$ ,

$$f'(t) = A(1 \times e^{-t} + t \times (-1)e^{-t}) = A(1 - t)e^{-t}.$$

En particulier,  $f'(0) = A(1 - 0)e^0 = A$ .

b) Plus  $A$  est grand, plus vite la personne subit les effets de l'alcool et donc moins la personne est corpulente. L'affirmation de l'énoncé est fausse.

### Partie B. Un cas particulier

1) D'après le calcul effectué à la question précédente, pour tout réel  $t \geq 0$ ,

$$f'(t) = 2(1 - t)e^{-t}.$$

Pour tout réel  $t \geq 0$ ,  $2e^{-t} > 0$  et donc, pour tout réel  $t \geq 0$ , le signe de  $f'(t)$  est le signe de  $1 - t$ . On en déduit le tableau de variations de la fonction  $f$ .

$t$	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f$			

2) La concentration d'alcool dans le sang de Paul est maximale 1 heure après l'ingestion de l'alcool. La valeur maximale de cette concentration est  $2e^{-1}$  gramme par litre soit 0,74 gramme par litre en arrondissant à  $10^{-2}$ .

3) D'après un théorème de croissances comparées,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ . Or, pour tout réel strictement positif  $t$ ,

$$f(t) = 2te^{-t} = 2 \times \frac{t}{e^t} = 2 \times \frac{1}{e^t/t}.$$

Puisque  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ , on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t/t} = 0$  puis  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 2 \times 0 = 0$ .

Ceci signifie qu'après un très long moment, l'alcool a presque complètement disparu dans le sang.

4) a) La fonction  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ . De plus,  $f(0) = 0$  et donc  $f(0) < 0,2$  et aussi  $f(1) = 2e^{-1} = 0,7\dots$  et donc  $f(1) > 0,2$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel  $t_1$  dans  $[0, 1]$  et même  $]0, 1[$  tel que  $f(t_1) = 0,2$ .

De même, la fonction  $f$  est continue sur  $[1, +\infty[$  avec  $f(1) > 0,2$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) < 0,2$ . D'après une généralisation du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel  $t_2$  dans  $[1, +\infty[$  et même  $]1, +\infty[$  tel que  $f(t_2) = 0,2$ .

b) Puisque la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $[1, +\infty[$ , pour  $t$  dans  $[1, +\infty[$ , si  $t < t_2$ , alors  $f(t) > 0,2$  et si  $t > t_2$ , alors  $f(t) < 0,2$ . Paul devra donc attendre  $t_2$  heures avant de reprendre le volant.

La calculatrice fournit  $f(3,57) = 0,201\dots$  et  $f(3,58) = 0,19\dots$ . On en déduit que  $3,575 < t_2 < 3,58$  ou encore  $3\text{ h }34,5\text{ min} < t_2 < 3\text{ h }34,8\text{ min}$ . Donc,  $t_2 = 3\text{ h }35\text{ min}$  arrondi à la minute la plus proche.

5) a)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ . Donc, il existe un intervalle de la forme  $[T, +\infty[$  tel que pour  $t \in [T, +\infty[$ ,  $f(t) < 5 \times 10^{-3}$ . A partir de l'instant  $T$  (et peut-être même avant), la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

b) Tableau complété.

	Initialisation	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6	Étape 7	Étape 8
p	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
t	3,5	3,75	4	4,25	4,5	4,75	5	5,25	5,5
C	0,21	0,18	0,15	0,12	0,10	0,08	0,07	0,06	0,04

L'algorithme affiche alors 5,5 qui est un temps, exprimé en heures, à partir duquel la quantité d'alcool dans le sang n'est plus détectable. Plus précisément, l'algorithme affiche une valeur approchée à 0,25 près du temps, exprimé en heures, à partir duquel la quantité d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

## EXERCICE 2

1) Dans la case C2, on a écrit

$$=B2+2*A2\wedge 2+3*A2+5$$

et dans la case B3, on a écrit

$$=2*B2+2*A2\wedge 2-A2$$

2) La colonne C nous permet de conjecturer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite géométrique de premier terme 7 et de raison 2. Montrons ce résultat.

- $v_0 = u_0 + 5 = 2 + 5 = 7$ .
- Soit  $n \geq 0$ .

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) + 5 = u_{n+1} + 2n^2 + 4n + 2 + 3n + 3 + 5 = u_{n+1} + 2n^2 + 7n + 10 \\ &= 2u_n + 2n^2 - n + 2n^2 + 7n + 10 = 2u_n + 4n^2 + 6n + 10 \\ &= 2(v_n - 2n^2 - 3n - 5) + 4n^2 + 6n + 10 \\ &= 2v_n.\end{aligned}$$

Donc, la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite géométrique de premier terme  $v_0 = 7$  et de raison  $q = 2$ . On en déduit que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$v_n = v_0 \times q^n = 7 \times 2^n,$$

puis que

$$u_n = v_n - 2n^2 - 3n - 5 = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5.$$

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$ .

### EXERCICE 3

#### Partie A

1) On sait que pour tout réel  $t \geq 0$ ,

$$P(T \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = -e^{-\lambda t} - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0,2t}.$$

Par suite,

$$P(T \leq 3) = 1 - e^{-0,2 \times 3} = 1 - e^{-0,6} = 0,451 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

2) Soit  $t$  un réel positif.

$$\begin{aligned} P(T \leq t) = 0,95 &\Leftrightarrow 1 - e^{-0,2t} = 0,95 \Leftrightarrow -e^{-0,2t} = -0,05 \Leftrightarrow e^{-0,2t} = 0,05 \\ &\Leftrightarrow -0,2t = \ln(0,05) \Leftrightarrow t = -\frac{\ln(0,05)}{0,2} \Leftrightarrow t = 14,9\dots \\ &\Leftrightarrow t = 15 \text{ min arrondi à la minute.} \end{aligned}$$

Le groupe doit attendre 15 minutes arrondi à la minute pour avoir une probabilité de 0,95 de voir une nouvelle étoile filante.

3) On sait que l'espérance de  $T$  est  $\frac{1}{\lambda}$  c'est-à-dire 5. Ceci signifie qu'il s'écoule en moyenne 5 minutes entre deux apparitions d'étoiles filantes ou encore que dans chaque intervalle de temps de 5 minutes, le groupe voit en moyenne une étoile filante. Comme 2 heures sont égales à 24 intervalles de temps de 5 minutes, on peut estimer à 24 en moyenne le nombre d'étoiles filantes vues par le groupe pendant 2 heures (et pas à 25 car le début de la sortie n'a aucune raison de coïncider avec l'apparition d'une étoile filante).

#### Partie B

1) Notons  $N$  l'événement « la personne est un nouvel adhérent » et  $T$  l'événement « la personne possède un télescope personnel ».

L'énoncé fournit  $P(N) = 0,64$ ,  $P(\bar{N} \cap T) = 0,27$  et  $P_N(\bar{T}) = 0,65$ . La probabilité demandée est  $P(T)$

Tout d'abord,  $P_{\bar{N}}(T) = \frac{P(\bar{N} \cap T)}{P(\bar{N})} = \frac{0,27}{1 - 0,64} = \frac{0,27}{0,36} = 0,75$ . Ensuite,  $P(\bar{N}) = 1 - P(N) = 1 - 0,64 = 0,36$  et  $P_N(T) = 1 - P_N(\bar{T}) = 1 - 0,65 = 0,35$ . D'après la formule des probabilités totales,

$$P(T) = P(N) \times P_N(T) + P(\bar{N}) \times P_{\bar{N}}(T) = 0,64 \times 0,35 + 0,36 \times 0,75 = 0,494.$$

2) La probabilité demandée est  $P_T(N)$ .

$$P_T(N) = \frac{P(N \cap T)}{P(T)} = \frac{P(N) \times P_N(T)}{P(T)} = \frac{0,64 \times 0,35}{0,494} = 0,453 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

#### Partie C

Sous l'hypothèse que  $p = 0,5$ , déterminons un intervalle de fluctuation au seuil 95%. On note que  $n = 100$  et donc  $n \geq 30$  puis  $np = n(1-p) = 50$  et donc  $np \geq 5$  et  $n(1-p) \geq 5$ . Un intervalle de fluctuation au seuil 95% est

$$\begin{aligned} \left[ p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] &= \left[ 0,5 - 1,96\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{100}}; 0,5 + 1,96\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{100}} \right] \\ &= \left[ 0,5 - 1,96\frac{0,5}{10}; 0,5 + 1,96\frac{0,5}{10} \right] = [0,402; 0,598]. \end{aligned}$$

La fréquence observée est  $f = 0,54$ .  $f$  appartient à l'intervalle de fluctuation. Le résultat du sondage ne l'amène pas à changer d'avis.

### EXERCICE 4

1) Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives  $(\sqrt{2}, 3)$ ,  $(1, 1)$  et  $(0, -4)$ . Donc les vecteurs  $\overrightarrow{CA}$  et  $\overrightarrow{CB}$  ont pour coordonnées respectives  $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 7 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ . De plus,

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 5\sqrt{2} - 7 \neq 0.$$

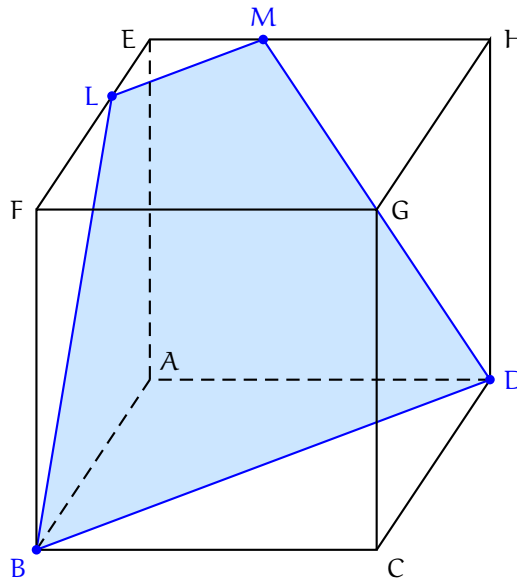
Donc, les vecteurs  $\overrightarrow{CA}$  et  $\overrightarrow{CB}$  ne sont pas colinéaires ou encore les points A, B et C ne sont pas alignés.

La proposition 1 est vraie.

2)  $i(1+i) = -1+i$  puis  $(-1+i)^2 = 1-2i-1 = -2i$  puis  $(-1+i)^4 = (-2i)^2 = -4$  puis  $(-1+i)^8 = (-4)^2 = 16$ . Donc,  $(i(1+i))^{2 \times 4} = 16$  et l'entier 4 est un entier n tel que  $(i(1+i))^{2n}$  soit un réel strictement positif.

La proposition 2 est fausse.

3) Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles. Le plan (BDL) est sécant au plan (ABC) en la droite (BD) et donc le plan (BDL) est sécant au plan (EFG) en la droite ( $\Delta$ ) passant par L est parallèle à la droite (BD). La droite ( $\Delta$ ) est sécante à la droite (EH) en un point M. La section du cube par le plan (BDL) est le trapèze BDML.



La proposition 3 est fausse.

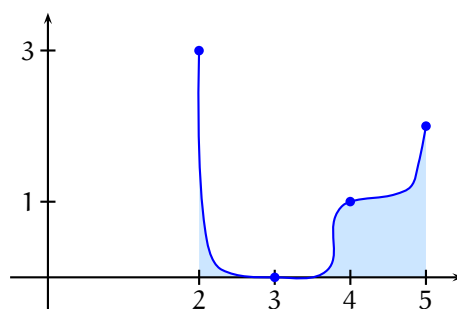
La droite (BF) est perpendiculaire au plan (ABC) et donc orthogonale à toute droite de ce plan. On en déduit que  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$ . Mais alors,

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BD} \cdot (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FL}) = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{FL} = \overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{FL}.$$

Les droites (FH) et (FL) ne sont pas perpendiculaires et donc  $\overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{FL} \neq 0$  puis  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BL} \neq 0$ . Ainsi, le triangle DBL n'est pas rectangle en B.

La proposition 4 est fausse.

4) Exemple de graphe.



Puisque la fonction  $f$  est positive,  $\int_2^5 f(x) dx$  est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre l'axe des abscisses et la courbe de  $f$  d'une part, et les droites d'équations respectives  $x = 2$  et  $x = 5$  d'autre part. Avec le graphique ci-dessus, on comprend que cette aire peut être aussi proche qu'on le désire de 1 et en particulier, on comprend que cette aire peut être strictement plus petite que 1,5. Donc,

La proposition 5 est fausse.